《資料 2》 Euler の公式と三角関数 (改訂版)

1 指数関数

指数関数 e^x $(x \in \mathbb{R})$ を次式により複素関数に拡張することができる (各 $z \in \mathbb{C}$ で絶対収束する):

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C}). \tag{1}$$

このように定義した指数関数に対しても, **指数法則** $e^z e^w = e^{z+w}$ $(z, w \in \mathbb{C})$ が成り立つ (Cauchy の乗積級数を用いて示される).

2 Euler(オイラー) の公式

(1) において, 特に $z = ix$ $(x \in \mathbb{R})$ ととれば,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \cos x + i \sin x.$$

このとき得られる

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

を Euler **の公式**と呼ぶ. これより

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{3}$$

((3) の $x \in \mathbb{R}$ を $z \in \mathbb{C}$ で置き換えて, 三角関数 $\cos x, \sin x$ を複素関数に拡張できる. (2) は複素関数の意味でも正しい.) これらを用いて, 三角関数に関連するの様々な関係式を以下のように見通しよく導くことができる.

- **加法定理** $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$ の実部, 虚部を比較して

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

- **n 倍角の公式** $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (de Moivre(ド・モアブル)の公式) より,

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos\theta + i \sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k} (i \sin\theta)^k.$$

両辺の実部, 虚部を比較して,

$$\cos n\theta = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} \cos^{n-2j}\theta \, \sin^{2j}\theta \qquad \cdots (\cos\theta \text{ の多項式}),$$

$$\sin n\theta = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j+1} \cos^{n-2j-1}\theta \, \sin^{2j+1}\theta \quad \cdots (\cos\theta \text{ の多項式}) \sin\theta.$$

ここで, $\lfloor a \rfloor$ $(a \in \mathbb{R})$ は a 以下の最大整数を表す.

- **級数への応用** 等比級数の和の公式により, $|r| < 1$ のとき,

$$\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} = 1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{iN\theta} = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{(N+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{i\frac{(N+1)\theta}{2}} - e^{-i\frac{(N+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} = e^{i\frac{N\theta}{2}} \frac{\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}, \tag{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} = 1 + re^{i\theta} + r^2 e^{i2\theta} + \cdots = \frac{1}{1 - re^{i\theta}} = \frac{1 - re^{-i\theta}}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})} = \frac{1 - re^{-i\theta}}{1 - 2r\cos\theta + r^2}. \tag{5}$$

(4) の実部, 虚部をとることにより (最後の等号は積和の公式),

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos N\theta=\frac{\cos\frac{N\theta}{2}\,\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right\},$$
$$\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin N\theta=\frac{\sin\frac{N\theta}{2}\,\sin\frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}-\frac{\cos(N+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right\}.$$

同様に, (5) より,

$$\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\theta=\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\theta=\frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\quad(|r|<1).$$

- **微分への応用** $\alpha:=a+ib$ の偏角を φ とすれば, $\alpha=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}$ であるから,

$$\left(e^{ax}e^{ibx}\right)^{(n)}=\left(e^{\alpha x}\right)^{(n)}=\alpha^n e^{\alpha x}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}e^{i(bx+n\varphi)}.$$

実部, 虚部を比較して,

$$\left(e^{ax}\cos bx\right)^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+n\varphi),\quad \left(e^{ax}\sin bx\right)^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\varphi).$$

特に, $a=0,\ b=1$ のとき, $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$, $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

- **積分への応用** $\alpha:=a+ib$ に対して,

$$\int e^{(a+ib)x}\,dx=\int e^{\alpha x}\,dx=\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}(\cos bx+i\sin bx).\quad (積分定数省略)$$

実部, 虚部を比較して,

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2},\quad \int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

3 三角関数と双曲線関数

(3) (の複素変数への拡張版) を用いて,

$$\cos(ix)=\frac{e^{i(ix)}+e^{-i(ix)}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x,$$
$$\sin(ix)=\frac{e^{i(ix)}-e^{-i(ix)}}{2i}=i\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}=i\,\sinh x.$$

この関係式と, 三角関数に対する加法定理 (複素変数でも成り立つ！) を用いて,

$$1=\cos^2(ix)+\sin^2(ix)=(\cosh x)^2+(i\,\sinh x)^2=\cosh^2 x-\sinh^2 x,$$
$$\begin{aligned}\cosh(x+y)&=\cos i(x+y)=\cos(ix+iy)=\cos(ix)\cos(iy)-\sin(ix)\sin(iy)\\&=\cosh x\cosh y-i\sinh x\cdot i\sinh y=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}i\sinh(x+y)&=\sin i(x+y)=\sin(ix+iy)=\sin(ix)\cos(iy)+\cos(ix)\sin(iy)\\&=i\sinh x\cdot\cosh y+\cosh x\cdot i\sinh y=i\,(\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y).\end{aligned}$$

よって,

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1,$$
$$\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y,$$
$$\sinh(x+y)=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y.$$