

# 《資料 1》 数学の基礎概念 (論理と集合)

## 1 論理

### 1.1 命題論理

正しいか正しくないか (真か偽か) が判断できる (はずの) 文や式を**命題**という. 真の命題は T (true), 偽の命題は F (false) という「値」をとると考え, これをその命題の**真理値**という. 命題  $p$  の否定を  $\neg p$  と表す. 命題  $p, q$  に対して, 「 $p$  または  $q$ 」という命題を  $p \vee q$  で表し, 「 $p$  かつ  $q$ 」という命題を  $p \wedge q$  で表す. また, 「 $p$  ならば  $q$ 」という命題を  $(\neg p) \vee q$  により定め, これを  $p \rightarrow q$  で表す. さらに,  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$  を  $p \leftrightarrow q$  で表す. すなわち, これらの**命題結合記号**  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$  は, 次の**真理表**により定義される.

| $p$ | $\neg p$ | $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $p \rightarrow q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|----------|-----|-----|------------|--------------|-------------------|-----------------------|
| T   | F        | T   | T   | T          | T            | T                 | T                     |
| T   | F        | T   | F   | T          | F            | F                 | F                     |
| F   | T        | F   | T   | T          | F            | T                 | F                     |
| F   | T        | F   | F   | F          | F            | T                 | T                     |

$p, q$  の真偽 (真理値) が一致することを  $p \equiv q$  で表すと, 任意の命題  $p, q, r$  に対して次が成り立つ.

- ①  $\neg(\neg p) \equiv p$  (二重否定の原則)
- ②  $p \vee \neg p \equiv \text{T}, p \wedge \neg p \equiv \text{F}$  (二律排反の原則)
- ③  $p \vee q \equiv q \vee p, p \wedge q \equiv q \wedge p$  (交換法則)
- ④  $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r, p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$  (結合法則)
- ⑤  $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r), p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  (分配法則)
- ⑥  $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$  (De Morgan の法則)
- ⑦  $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$  (対偶の法則)
- ⑧  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r) \equiv \text{T}$  (三段論法)

### 1.2 述語論理

$x$  が (ある定まった集合を動く) 変数で,  $x$  の値を指定するごとに  $P(x)$  が命題になるとき,  $P(x)$  は**命題関数** (または**述語**) という. このとき, 「すべての  $x$  に対し  $P(x)$  が真である」という命題 (**全称命題**) を  $\forall x P(x)$  と表し, 「 $P(x)$  が真であるような  $x$  が存在する」という命題 (**存在命題**) を  $\exists x P(x)$  と表す. 任意の命題関数  $P(x), Q(x)$  あるいは  $P(x, y)$  に対して次が成立する.

- ⑨  $\neg(\forall x P(x)) = \exists x(\neg P(x)), \neg(\exists x P(x)) = \forall x(\neg P(x))$
- ⑩  $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)), \exists x (P(x) \vee Q(x)) = (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$
- ⑪  $\forall x (\forall y P(x, y)) = \forall y (\forall x P(x, y)), \exists x (\exists y P(x, y)) = \exists x (\exists y P(x, y))$

上述の命題結合記号と, **全称記号**  $\forall$ , **存在記号**  $\exists$  をあわせて, **論理記号**と呼ぶ.

数学の命題 (定理) は  $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$  (が真である) の形で述べられることが多い.  $P(x) = \text{F}$  なる  $x$  に対しては  $P(x) \Rightarrow Q(x)$  は常に真であるから, 上の命題は  $\{x \mid P(x)\} \subset \{x \mid Q(x)\}$  ( $\{x \mid P(x)\}$  は  $P(x)$  が真である  $x$  全体の集合を表す) と同じことである. (このとき,  $Q(x)$  は  $P(x)$  の**必要条件**,  $P(x)$  は  $Q(x)$  の**十分条件**であるという.) 証明法としては次の 3 通り (互いに同値であることを確かめよ) が用いられる.

- 直接法:  $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \iff \{x \mid P(x)\} \subset \{x \mid Q(x)\}$
- 対偶法:  $\forall x ((\neg Q(x)) \Rightarrow (\neg P(x))) \iff \{x \mid \neg Q(x)\} \subset \{x \mid \neg P(x)\}$
- 背理法:  $\neg(\exists x (P(x) \wedge (\neg Q(x)))) \iff \{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid \neg Q(x)\} = \emptyset$

## 2 集合と写像

### 2.1 集合

原理的に特定できる「物の集まり」を**集合**という.  $x$  が集合  $X$  の 1 つの「個体」であるとき,  $x$  は  $X$  の**元** (または**要素**) であるといい,  $x \in X$  と表す. またその否定を  $x \notin X$  と表す.

$x, y, z, \dots$  からなる集合を  $\{x, y, z, \dots\}$  と表す (集合の**外延的定義**). また性質  $P(x)$  をもつ ( $P(x)$  が真となる)  $x \in X$  全体からなる集合を  $\{x \in X \mid P(x)\}$  (または  $\{x \in X : P(x)\}$ ) と表す (集合の**内包的定義**). 但し, 同じものを複数含む場合は, 例えば  $\{0, 0\} = \{0\}$ ,  $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 1\}$  というように解釈する.

集合  $X, Y$  に対し,  $\forall x (x \in X \Rightarrow x \in Y)$  が成り立つとき,  $X$  は  $Y$  の**部分集合**であるといい,  $X \subset Y$  (または  $X \subseteq Y$ ) と表す. 特に,  $X = Y$  とは  $(X \subset Y) \wedge (Y \subset X)$  であることをいう. また,  $(X \subset Y) \wedge (X \neq Y)$  であるとき,  $X$  は  $Y$  の**真部分集合**であるといい,  $X \subsetneq Y$  (または  $X \subsetneqq Y$ ) と表す.

集合  $X$  の部分集合  $A, B, C$  を考えるとき,

- $A^c := \{a \in X \mid a \notin A\}$  を ( $X$  における)  $A$  の**補集合**という.
- $A \cup B := \{a \mid (a \in A) \vee (a \in B)\}$  を  $A$  と  $B$  の**合併集合**または**和集合**という.
- $A \cap B := \{a \mid (a \in A) \wedge (a \in B)\}$  を  $A$  と  $B$  の**共通部分**または**積集合**という.
- $A \setminus B := A \cap B^c (= A - B)$  を  $A$  から  $B$  を引いた**差集合**または  $A$  に対する  $B$  の**補集合**という.

このとき,  $A = \{a \in X \mid a \in A\}$  とみて, 1.1 の ③–⑥ を適用すれば次を得る (①, ②は何を意味するか?):

- ③'  $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$  (交換法則)
- ④'  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$  (結合法則)
- ⑤'  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (分配法則)
- ⑥'  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C), A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$  (De Morgan の法則)

集合  $X$  の部分集合の全体からなる集合を  $X$  の**べき集合**と呼び,  $2^X$  (または  $\mathcal{P}(X)$ ) で表す. **空集合**  $\emptyset$  および  $X$  自身は  $2^X$  の元である.  $\#$  によって集合の元の個数を表せば,  $\#(2^X) = 2^{\#X}$  が成り立つ.

2 つの集合  $X, Y$  に対して,  $x \in X$  と  $y \in Y$  を組にした  $(x, y)$  の形のものの全体によって構成される集合を  $X$  と  $Y$  の**直積集合**といって,  $X \times Y$  で表す:  $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$ .

### 2.2 写像

2 つの集合  $X, Y$  に対し,  $X$  の各元に  $Y$  の元を一つずつ対応させる規則  $X \ni x \mapsto y := f(x) \in Y$  が定まっているとき, この規則  $f$  を  $X$  から  $Y$  への**写像**または**関数**といい ( $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  の場合には関数と呼ぶことが多い),  $f: X \rightarrow Y$  と表す. このとき,  $X$  を写像  $f$  の**定義域**または**始集合**,  $Y$  を  $f$  の**余域**または**終集合**という. また,  $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$  を  $f$  の**グラフ**という.

各  $x \in X$  に対して,  $f(x) \in Y$  を  $x$  の ( $f$  による) **像**という. 同様に, 各  $A \subset X$  に対して,  $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$  を  $A$  の**像**という. 特に  $f(X)$  を  $f$  の**値域**という (余域  $Y$  を値域と呼ぶ流儀もある). また各  $B \subset Y$  に対して,  $f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\}$  を  $B$  の ( $f$  による) **逆像**という. (このようにして  $f: X \rightarrow Y$  は自然に  $f: 2^X \rightarrow 2^Y$  および  $f^{-1}: 2^Y \rightarrow 2^X$  を導く.) このとき,  $A, A_1, A_2 \subset X$  および  $B, B_1, B_2 \subset Y$  に対して次の関係式が成り立つ.

- $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2), B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2), f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2), f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(f(A)) \supset A, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \supset B$

写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して,  $f(X) = Y$  であるとき,  $f$  は  $Y$  の**上への写像**, または  $f$  は  $X$  から  $Y$  への**全射**という. また,  $\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$  が成り立つとき,  $f$  は **1対1写像**, または  $f$  は  $X$  から  $Y$  への**単射**という.  $f$  が全射かつ単射のとき, **全単射**であるという. 特に  $X = Y$  のとき,  $X \ni x \mapsto x \in X$  で定まる全単射を  $X$  の**恒等写像**といい,  $\text{id}_X$  または  $I_X$  などと表す.  $f$  が全射ならば  $f(f^{-1}(B)) = B$  が成り立ち,  $f$  が単射ならば  $f^{-1}(f(A)) = A$  が成り立つ.

$f: X \rightarrow Y$  が全単射のとき, 各  $y \in Y = f(X)$  に対して  $f(x) = y$  を満たす  $x \in X$  が唯一つ定まり,  $y \mapsto x$  により  $Y$  から  $X$  への一つの写像が得られる. これを  $f$  の**逆写像**と呼び,  $f^{-1}$  で表す. このとき  $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$  ( $y \in Y$ ) が成り立つ. (ちなみに  $f(\{x\}) = \{f(x)\}$  ( $x \in X$ ) はいつも成り立つ.)

写像  $f: X \rightarrow Y$  および  $g: Y_0 \rightarrow Z$  は  $f(X) \subset Y_0$  のとき**合成可能**という. このとき  $X \ni x \mapsto h(x) := g(f(x)) \in Z$  によって定まる写像  $h: X \rightarrow Z$  を  $f$  と  $g$  の**合成写像**といい,  $h = g \circ f$  と表す. 特に,  $f: X \rightarrow Y$  が全単射なら,  $f$  の逆写像  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  が存在し,  $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ ,  $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$  が成り立つ.

写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して, 終集合  $Y$  を  $Y_1 := f(X) \subset Y$  で置き換え  $f: X \rightarrow Y_1$  と見なせば全射となる. 一方,  $f: X \rightarrow Y$  を  $X_1 \subset X$  の元についてだけ考えれば,  $X_1 \ni x \mapsto f(x) \in Y$  により  $X_1$  から  $Y$  への写像が得られる. これを  $f$  の  $X_1$  上への**制限**といい,  $f|_{X_1}$  で表す.

### 3 $\varepsilon$ - $\delta$ 論法 (参考)

講義では触れないかもしれないが, よく知られた議論の方法であるので紹介する. 論理記号が効果的に使われていることにも注目せよ.

#### 3.1 数列の極限

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha \in \mathbb{R}$  に**収束する** ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  と表す) とは,

$$\forall \varepsilon > 0 \left( \exists n_1 \in \mathbb{N} \left( \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon) \right) \right). \quad (1)$$

が成り立つことであると定義される (講義では上極限, 下極限を用いて定義した). この条件はしばしば

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon),$$

$$\text{あるいは, } \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

などと略記される. (1) を直訳すれば

任意の  $\varepsilon > 0$  に対して, 適当な  $n_1 \in \mathbb{N}$  が存在し, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して

$n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$  という命題が成立する

と述べられる. もう少しわかりやすい言葉に翻訳すれば

どんなに小さい正数  $\varepsilon$  を取っても, ( $\varepsilon$  に応じて) 番号  $n_1$  を十分大きく選ぶことにより,

$n_1$  以上の番号  $n$  ではいつでも  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$  が成り立つようにできる.

数列  $\{a_n\}$  が  $+\infty$  に**発散する** ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  と表す) とは,

$$\forall L > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_1 \Rightarrow a_n > L)$$

が成り立つことであると定義される ( $+\infty$  は  $\infty$  と略記される). この条件を意識すれば

どんなに大きい正数  $L$  を取っても, ( $L$  に応じて) 番号  $n_1$  を十分大きく選ぶことにより,

$n_1$  以上の番号  $n$  ではいつでも  $a_n > L$  が成り立つようにできる.

数列  $\{a_n\}$  が  $-\infty$  に発散することも同様にして定義される.

数列  $\{a_n\}$  が**発散する**とは、どんな実数にも収束しないこと、すなわち

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \left( \neg (\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon)) \right)$$

ということである。これを、**1**で述べた事実を用いて書き換えてみよう。まず、⑨より

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_1 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} (\neg (n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon))$$

と変形できる。 $\neg (n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon)$ の部分には $\Rightarrow$ の定義と①、⑥を用いて、最終的に

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_1 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} ((n \geq n_1) \wedge (|a_n - \alpha| \geq \varepsilon))$$

と書き換えられる。すなわち、

どんな  $\alpha \in \mathbb{R}$  を与えても、( $\alpha$  に応じて) 正数  $\varepsilon$  を十分小さく選べば、いくら大きい番号  $n_1$

を取っても  $n \geq n_1$  であつて  $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$  を満たすような番号  $n$  が存在してしまう

という状況が、数列  $\{a_n\}$  が発散するということである。

## 3.2 関数の極限

区間  $I$  上で定義された関数  $f(x)$  について考える。 $a \in \bar{I}$  (すなわち  $a$  は  $I$  の内点または端点) および  $\ell \in \mathbb{R}$  に対して、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が  $\ell$  に**収束する** ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  と表す) とは、

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I \setminus \{a\} (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon) \quad (2)$$

すなわち、

どんなに小さい正数  $\varepsilon$  を取っても ( $\varepsilon$  に応じて) 正数  $\delta$  を十分小さく選ぶことにより、

$x \in I \setminus \{a\}$  が  $|x - a| < \delta$  である限りは  $|f(x) - \ell| < \varepsilon$  を満たすようにできる

ということである。ここで、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$  と次の条件とが同値になることを見よう：

$$\forall \{a_n\} \subset I \setminus \{a\} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell \right) \quad (3)$$

(ここで  $\{a_n\} \subset I \setminus \{a\}$  とは、数列  $\{a_n\}$  をこの数列の作る集合と同一視して、 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset I \setminus \{a\}$  を満たすことを表す。) まず (2) $\Rightarrow$ (3) を示す。数列  $\{a_n\} \subset I \setminus \{a\}$  が  $a$  に収束するとき、(2) の  $\delta > 0$  に対して

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \delta)$$

であるから、(2) より  $|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$  となつて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \ell$  であることがわかる。次に (3) $\Rightarrow$ (2) を対偶によって示す。(2) を否定すれば、3.1 と同様の議論により

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in I \setminus \{a\} ((|x - a| < \delta) \wedge (|f(x) - \ell| \geq \varepsilon)).$$

各  $\delta = n^{-1}$  に対して存在する  $x \in I \setminus \{a\}$  を  $a_n$  とすれば、

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in I \setminus \{a\} ((|a_n - a| < n^{-1}) \wedge (|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon)).$$

ここで選ばれた  $\{a_n\}$  は、 $\{a_n\} \subset I \setminus \{a\}$  を満たし  $a$  に収束するが、どんな番号  $n$  に対しても  $|f(a_n) - \ell| \geq \varepsilon$  であるから、 $f(a_n)$  は  $\ell$  には収束し得ない。すなわち (3) が否定される。

$f(x)$  が  $a \in I$  で**連続**であるとは、

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \quad (4)$$

が成り立つことと定義される。これを ④ 関数の極限、⑤ 数列の極限 を用いれば、それぞれ

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \textcircled{b} \forall \{a_n\} \subset I \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \right)$$

と言い表される。(4)において、 $\forall x \in I \setminus \{a\}$  でなく  $\forall x \in I$  となっているのは、後続の不等式  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  が  $x = a$  のときには自明 (= 明らかに正しい) となるからである。