

【解析学・レポート問題】 (no.3)

(提出は2週間後)

- 0 期末試験までに微積教科書の次の問題を解け. (提出不要, 授業 web ページに解答例あり)

問題 7.1 (p.163) 2, 3, 4, 5.

- 1 Newton の冷却法則によれば, 一定の室温 a [$^{\circ}\text{C}$] に置かれた物体の時刻 t における温度を $u(t)$ [$^{\circ}\text{C}$] とすると, $u = u(t)$ の時間変化は次の微分方程式で表される.

$$\frac{du}{dt} = -k(u - a) \quad (k: \text{正定数})$$

これを用いて次の問いに答えよ.

- (1) この微分方程式を初期条件 $u(0) = u_0$ の下で解け.
- (2) 室温 20°C の部屋で, 100°C のコーヒーが5分後に 80°C となった. 60°C になるのに何分くらいかかるか. また, 20分後のコーヒーの温度はどのくらいか. 必要なら $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いてよい.

- 2 一定環境内の生物の個体数の変化を表すモデル方程式として,

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (r, K: \text{正定数})$$

が知られている. ($N = N(t)$ は時刻 t での生物の個体数を表す.)

- (1) この微分方程式を初期条件 $N(0) = N_0 > 0$ の下で解け.
- (2) (1) の解 $N(t)$ について, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ (個体群サイズの限界) を求めよ.

- 3 空気抵抗を受けて落下する物体の運動 (鉛直下向きを正の向き) が, 物体の位置 $x = x(t)$ に対する微分方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (m, g, c: \text{正定数})$$

に支配されるとする. (実は, 落下速度 $v := \frac{dx}{dt}$ が十分小ならば, 空気抵抗の項は $-cv^2$ でなく $-\tilde{c}v$ の形を用いる.)

- (1) $v = \frac{dx}{dt}$ の1階微分方程式と見て $v(0) = 0$ の下で解き, 解 $v(t)$ に対して $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ (終端速度) を求めよ.
- (2) 上の $x = x(t)$ に対する微分方程式を初期条件 $x(0) = v(0) = 0$ の下で解け.

- 4 RL 回路の微分方程式

$$L \frac{dI}{dt} + RI = E \sin \omega t \quad (L, R, E, \omega: \text{正定数})$$

について, 以下の問いに答えよ. ($I = I(t)$ は回路を流れる電流を表す.)

- (1) 一般解を求めよ.
- (2) $I(0) = 0$ 満たす解を求めよ.

【解析学・レポート問題】 (no.3) 《解答例》

- 1 (1) $\frac{du}{dt} = -k(u-a)$ であるから, $u \neq a$ のとき, $\int \frac{du}{u-a} = -k \int dt$ より, $\log|u-a| = -kt + C$ (C は任意定数). よって, $u = a + C_1 e^{-kt}$ ($C_1 = \pm e^C \neq 0$). また, $u = a$ (定数関数) は特殊解 ($C_1 = 0$). 以上より, 一般解は $u = a + C_1 e^{-kt}$. 与えられた初期条件を満たすとすれば $u(0) = a + C_1 = u_0$. これより $C_1 = u_0 - a$ となり, 初期値問題の解は $u = a + (u_0 - a)e^{-kt}$.

(2) t 分後に 60°C になるとすれば,

$$\begin{cases} 80 = 20 + (100 - 20)e^{-5k} \\ 60 = 20 + (100 - 20)e^{-kt} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-5k} = 3/4 \\ e^{-kt} = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5k = \log(3/4) = \log 3 - 2\log 2 \\ -kt = \log(1/2) = -\log 2 \end{cases}$$

$$\therefore t = \frac{\log 2}{k} = \frac{5 \log 2}{5k} = \frac{5 \log 2}{2 \log 2 - \log 3} = \frac{5}{2 - \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}} = 12.0 \dots \quad (\text{約 } 12 \text{ 分後}).$$

また, 20 分後の温度 $u(20)$ は, $e^{-20k} = (e^{-5k})^4$ に注意して,

$$u(20) = 20 + (100 - 20)e^{-20k} = 20 + 80\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{725}{16} = 45.31 \dots \quad (\text{約 } 45.3^\circ\text{C}).$$

- 2 (1) $N(0) = N_0 > 0$ より, ($t = 0$ の近傍で) $N > 0$ と仮定してよい. $\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = \frac{1}{K}rN(K - N)$ から, $N \neq K$ のとき, $\int \frac{dN}{N(K - N)} = \frac{r}{K} \int dt$. ここで,

$$\int \frac{dN}{N(K - N)} = \frac{1}{K} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dt = \frac{1}{K} \log \left| \frac{N}{K - N} \right| + C.$$

これより,

$$\log \left| \frac{N}{K - N} \right| = rt + C \quad (C \text{ は任意定数}). \quad \therefore \frac{K - N}{N} = C_1 e^{-rt} \quad (C_1 = \pm e^{-C} \neq 0). \quad \dots \textcircled{1}$$

更に, N について解き, $N = \frac{K}{1 + C_1 e^{-rt}}$. また, $N = K$ (定数関数) は特殊解 ($C_1 = 0$). よって, 一般解は $N = \frac{K}{1 + C_1 e^{-rt}}$. 与えられた初期条件を満たすなら, $N(0) = N_0 > 0$ より $C_1 = \frac{K}{N_0} - 1$ となり,

$$N = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}} = \frac{KN_0}{Ke^{-rt} + N_0(1 - e^{-rt})}. \quad \dots \textcircled{2}$$

(2) $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} = 0$ であるから, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$.

【注】①で $\frac{K-N}{N} = \dots$ の形にしたのはそれ以後の議論の中で場合分けをしないための工夫である. $\frac{N}{K-N} = \dots$ とするのが普通のやり方. ②は N が $t \geq 0$ 全体で定義されることが分かるように式を纏めた.

- 3 (1) $v = \frac{dx}{dt}$ とおけば, 与えられた微分方程式は $\frac{dv}{dt} = \frac{c}{m} \left(\frac{mg}{c} - v^2 \right) = b(a^2 - v^2)$ ($a := \sqrt{\frac{mg}{c}}, b := \frac{c}{m}$) と書ける. $v \neq \pm a$ のとき,

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v} \right) dv = b \int dt$$

であるから,

$$\frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+v}{a-v} \right| = bt + C_0 \quad (C_0 \text{ は任意定数}). \quad \therefore \frac{a+v}{a-v} = C_1 e^{2abt} \quad (C_1 = \pm e^{2aC_0}).$$

$v(0) = 0$ より, $C_1 = 1$. 従って, $\frac{a+v}{a-v} = e^{2abt}$ を $v = v(t)$ について解き,

$$v(t) = a \cdot \frac{e^{2abt} - 1}{e^{2abt} + 1} = a \tanh(abt) = \sqrt{\frac{mg}{c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}} t\right). \quad \text{更に, } \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{c}}.$$

(この $v(t)$ が初期条件 $v(0) = 0$ を満たす解であるから, 解の一意性により, $v = \pm a$ の場合は吟味しなくてよい.)

(2) $\frac{dx}{dt} = a \tanh(abt)$ および $x(0) = 0$ を用いて,

$$x(t) = \int_0^t a \tanh(abs) ds = \frac{1}{b} \log \cosh(abt) = \frac{m}{c} \log \cosh\left(\sqrt{\frac{cg}{m}} t\right).$$

【注】 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{\{\cosh x\}'}{\cosh x}$ より, $\int \tanh x dx = \log \cosh x$ となる ($\log(\cosh x)$ はしばしば $\log \cosh x$ と書かれる).

【類題】 投げ上げられた物体が地面に落ちてくるまでにどんな運動するかを考える. 鉛直上向きを正の向き とすれば, (もとの問題と同じ) 空気抵抗を受けて運動する物体の速度 $v = \frac{dx}{dt}$ (x は高さ) は

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - cv|v| \quad (m, g, c: \text{正定数})$$

に支配される (空気抵抗は運動と反対方向に働くことに注意). 投げ上げ速度を $v_0 > 0$ として, 次の問題を考える:

- ① 最高点に達する時刻 t_1 とその高さ x_1 を求めよ.
- ② 地面に落ちた時刻 t_2 とその瞬間の速度 v_2 を求めよ.

以下, 略解を書いておく. 但し, m, g, c の代わりに上で定義した a, b を用いた.

- ① 最高点に達するまでの微分方程式は $\frac{dv}{dt} = -b(a^2 + v^2)$ ($0 \leq t \leq t_1$) であるから,

$$\int \frac{dv}{a^2 + v^2} = -b \int dt. \quad \therefore \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{v}{a} = -bt + C.$$

ここで, $v(0) = 0$ より, $C = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{v_0}{a}$. よって, $\theta_0 = \tan^{-1} \frac{v_0}{a}$ とおけば, $v(t) = a \tan(\theta_0 - abt)$ であり, $t_1 = \frac{1}{ab} \theta_0 = \frac{1}{ab} \tan^{-1} \frac{v_0}{a}$ を得る. さらに,

$$x(t) = \int_0^t a \tan(\theta_0 - abs) ds = \frac{1}{b} \log \frac{\cos(\theta_0 - abt)}{\cos \theta_0} \quad (0 \leq t \leq t_1),$$

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{b} \log \frac{1}{\cos \theta_0} = \frac{1}{2b} \log \left(1 + \left(\frac{v_0}{a}\right)^2\right).$$

- ② 最高点に達してから地面に落ちるまでの微分方程式は $\frac{dv}{dt} = -b(a^2 - v^2)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) であるから,

$$\int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a+v} + \frac{1}{a-v}\right) dv = -b \int dt. \quad \therefore \frac{a+v}{a-v} = C_1 e^{-2abt}.$$

$v(t_1) = 0$ より $C_1 = e^{2abt_1}$, $v(t) = -a \cdot \frac{1 - e^{-2ab(t-t_1)}}{1 + e^{-2ab(t-t_1)}} = -a \tanh(ab(t-t_1))$. 更に, $x(t_1) = x_1$ より,

$$x(t) - x_1 = -a \int_{t_1}^t \tanh(ab(s-t_1)) ds = -\frac{1}{b} \log \cosh(ab(t-t_1)) \quad (t_1 \leq t \leq t_2).$$

$x(t_2) = 0$ であるから, $\log \cosh(ab(t_2-t_1)) = bx_1 = \frac{1}{2} \log \left(1 + \left(\frac{v_0}{a}\right)^2\right)$ となり,

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{ab} \sinh^{-1} \frac{v_0}{a}, \quad v_2 = v(t_2) = -a \tanh(ab(t_2-t_1)) = -\frac{av_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}.$$

- 4 (1) この微分方程式は $\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \sin \omega t$ と書けるから, 1 階線形微分方程式の解の公式を用いて,

$$I = e^{-\frac{Rt}{L}} \int e^{\frac{Rt}{L}} \cdot \frac{E}{L} \sin \omega t dt = \frac{E}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t dt.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t \, dt &= \frac{L}{R} e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \int e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t \, dt \\ &= \frac{L}{R} e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t - \frac{L\omega}{R} \left(\frac{L}{R} e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t + \frac{L\omega}{R} \int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t \, dt \right).\end{aligned}$$

$\int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t \, dt$ について整理すれば,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}\right) \int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t \, dt &= \frac{L}{R} e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t - \frac{L^2\omega}{R^2} e^{\frac{Rt}{L}} \cos \omega t. \\ \therefore \int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t \, dt &= \frac{L}{L^2\omega^2 + R^2} e^{\frac{Rt}{L}} (-L\omega \cos \omega t + R \sin \omega t) + C.\end{aligned}$$

よって, 一般解は

$$\begin{aligned}I &= \frac{E}{L} e^{-\frac{Rt}{L}} \cdot \frac{L}{L^2\omega^2 + R^2} e^{\frac{Rt}{L}} (-L\omega \cos \omega t + R \sin \omega t) + C_1 e^{-\frac{Rt}{L}} \\ &= \frac{E}{L^2\omega^2 + R^2} (-L\omega \cos \omega t + R \sin \omega t) + C_1 e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (C_1 \text{ は任意定数}).\end{aligned}$$

【別法】 $L \frac{du}{dt} + Ru = E \cos \omega t$ は定数係数の線形微分方程式である. 特性多項式は (変数を τ として) $F(\tau) = L\tau + R$ であるから, 特性方程式 $F(\tau) = 0$ の根は $\tau = -\frac{R}{L}$ のみ. よって, 斉次方程式 $LDu + Ru = 0$ ($D = \frac{d}{dt}$) の一般解は $I = Ce^{-\frac{Rt}{L}}$ (C は任意定数). あとは特殊解が 1 つ見つければ, それと $Ce^{-\frac{Rt}{L}}$ の和が非斉次方程式 $L \frac{du}{dt} + Ru = E \cos \omega t$ の一般解となる. ここでは, 2 つの方法で特殊解を求めてみよう.

〈方法 1〉 特殊解は

$$I = \frac{1}{LD + R} E \sin \omega t = \frac{E}{LD + R} \operatorname{Im}[e^{i\omega t}] = \operatorname{Im}\left[\frac{E}{LD + R} e^{i\omega t}\right]$$

で与えられる. ここで,

$$\frac{E}{LD + R} e^{i\omega t} = \frac{E}{L i\omega + R} e^{i\omega t} = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2} (R - iL\omega)(\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

であるから,

$$I = \operatorname{Im}\left[\frac{E}{LD + R} e^{i\omega t}\right] = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2} (-L\omega \cos \omega t + R \sin \omega t).$$

〈方法 2〉 特殊解は $I = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ の形で探せる. 実際, これを方程式に代入して,

$$\begin{aligned}L(-a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t) + R(a \cos \omega t + b \sin \omega t) &= E \sin \omega t. \\ \therefore (bL\omega + aR) \cos \omega t + (-aL\omega + bR) \sin \omega t &= E \sin \omega t.\end{aligned}$$

特殊解となるためには, $bL\omega + aR = 0$, $-aL\omega + bR = E$. よって, $\begin{bmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$ より,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2 + L^2\omega^2} \begin{bmatrix} R & -L\omega \\ L\omega & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2} \begin{bmatrix} -L\omega \\ R \end{bmatrix}.$$

従って, 特殊解は

$$I = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2} (-L\omega \cos \omega t + R \sin \omega t).$$

(2) $I(0) = \frac{E}{L^2\omega^2 + R^2} (-L\omega) + C = 0$ より, $C = \frac{EL\omega}{L^2\omega^2 + R^2}$. よって, 求める解は

$$\begin{aligned}I &= \frac{E}{L^2\omega^2 + R^2} (-L\omega \cos \omega t + R \sin \omega t) + \frac{EL\omega}{L^2\omega^2 + R^2} e^{-\frac{Rt}{L}} \\ &= \frac{E}{L^2\omega^2 + R^2} \{L\omega(e^{-\frac{Rt}{L}} - \cos \omega t) + R \sin \omega t\}.\end{aligned}$$