

【解析学・レポート問題】 (no.2)

(提出日: 2 週間後)

0 微積の教科書の問題 6.2 (p.157) 2 ~ 5 を解いてみよ (教科書で触れた問題も含まれている).

※これは提出の必要なし. 講義 web ページの解答例で確認せよ.

1 次の関数を $x = 0$ における整級数に展開せよ. またその収束区間も求めよ.

(1) $\cosh x$ (2) $\log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (3) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ (ヒント: 分子を $\cos 2x$ で表現する)

(4)* $\frac{1}{1+x+x^2}$ (ヒント: 分子分母に $1-x$ を掛ける) (5)* $\varphi(x) = \begin{cases} \cosh \sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \cos \sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$

2 次の関数の $x = 0$ における整級数の 0 でない最初の 3 項を求めよ.

(1) $e^{-x} \sin x$ (2) $\tanh x$ (3) $\log(\cos x)$ (ヒント: $\cos x = 1 + f(x)$, $f(0) = 0$)

(4)* $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (ヒント: $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(1+x)}{x}}$, $\frac{\log(1+x)}{x} = 1 + f(x)$, $f(0) = 0$)

3 次の級数の和を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (ヒント: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)'$ を用いる)

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}$ (ヒント: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n+2}}{3n+2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{3n+1} \right) dt$ を用いる)

4* 数列 $\{a_n\}$ に対して, $[-1, 1]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ を $f_n(x) = \begin{cases} a_n x(1-nx)^2(1+2nx)^2 & (-\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$ に
より定める. $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ が定数関数 0 である.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx$ が成り立たなくなるような $\{a_n\}$ の例を挙げよ.

(2) $\{f'_n(x)\}$ の極限関数が存在し, しかも $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$ ($-1 < x < 1$) が成り立たなくなるような $\{a_n\}$ の例を挙げよ.

5 第 n 項が次で与えられる関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限関数 $f(x)$ を求め, 一様収束性を調べよ.

(1) $\frac{1}{(1+x^2)^n}$ (2) $\frac{x^n}{(1+x^2)^n}$ (3) $nx(1-x)^n$ ($0 \leq x \leq 1$)

6 次の関数項級数の一様収束性を調べよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$ ($0 \leq x \leq 1$) (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^3x^2}$ (ヒント: $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$)

(4)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$ (ヒント: $\frac{(-1)^n}{n + \sin x} = (-1)^n \left(\frac{1}{n + \sin x} - \frac{1}{n} \right) + \frac{(-1)^n}{n}$)

7 $p > m \in \mathbb{N}$ のとき, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ ($x \in \mathbb{R}$) とおく.

(1) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数となることを示せ.

(2)* $m \geq 2$ ならば, $f(x)$ は C^{m-1} 級関数で, $f^{(j)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx + (j\pi)/2)}{n^{p-j}}$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$) が成り立つことを示せ.