

【解析学・レポート問題】 (no.1)

(提出日: 2 週間後)

- 0 微積の教科書の問題 6.1 (p.146) と問題 6.2 (p.157) 1 を解いてみよ.

※これは提出の必要なし (解答は後で公開). (続きの問題は次回の課題で指定する予定)

- 1 次の性質を満たすような交項級数 $\sum b_n$ の具体例をそれぞれ 1 つ挙げよ (収束しない理由も説明せよ).

- (1) $\{|b_n|\}$ は単調減少列であるが, $\sum b_n$ が収束しない.
 (2) $\{|b_n|\}$ は 0 に収束するが, $\sum b_n$ が収束しない.

- 2 次の整級数の収束半径および収束区間 (= 実数の範囲での収束域) を求めよ.

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n(n+1)}} x^n$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$, (3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$,
 (4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\log n)^\alpha}$ ($\alpha > 0$) (ヒント: $\int_2^\infty \frac{dt}{t(\log t)^\alpha}$ を $s = \log t$ で置換)

- 3* 正項級数の収束判定に積分を用いることがよくあるが, 発散する場合でも発散の様子を調べるのに積分が利用される. 区間 $x \geq 1$ において連続で単調な関数 $f(x)$ に対して,

$$S_N = \sum_{n=1}^N f(n), \quad I_N = \int_1^N f(x) dx$$

とおき, 次の問いに答えよ.

- (1) $f(1) \leq S_N - I_N \leq f(N)$ ($f(x)$ が単調増加なら ' $\leq$ ', 単調減少なら ' $\geq$ ') を示せ.
 (2) $f(x)$ が単調減少な正值関数のとき, $D_N := S_N - I_N$ の定める数列 $\{D_N\}$ が収束することを示せ. (ヒント: 単調性と有界性)
 (3) (1) を $f(x) = \log x$ に対して適用することにより,

$$N! = N^N e^{-N+o(N)} \quad (N \rightarrow \infty)$$

を示せ. (上式は, $\log N! = N \log N - N + o(N)$ と同じもの. ここで, $o(\cdot)$ は Landau の記号: $\varphi(N) = o(N^\alpha)$ ($N \rightarrow \infty$) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi(N)/N^\alpha \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) ($N^0 = 1$ に注意). 実はもっと精密な Stirling の公式: $N! = \sqrt{2\pi N} N^{N+1/2} e^{-N} (1 + o(1))$ ($N \rightarrow \infty$) が知られている.)

- (4) (2) を $f(x) = 1/x$ に対して適用することにより, ある定数 $0 < \gamma < 1$ があって,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \log N + \gamma + o(1) \quad (N \rightarrow \infty) \quad \dots (\star)$$

と表されることを示せ. (γ は Euler の定数と呼ばれ, その値は $\gamma = 0.5772156649 \dots$ である)

- 4* 条件収束級数は項の順序を入れ換えると和が変わることがある. 具体例を構成しよう.

$$A_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1}, \quad B_N = \sum_{n=1}^N \frac{-1}{2n}$$

とおいて, 次の問いに答えよ.

- (1) $S_N = \sum_{n=1}^N 1/n$ とおくと, $B_N = -S_N/2$, $A_N - B_N = S_{2N}$ が成り立つ. [3](4) の ($\star$) を用いることにより, A_N, B_N に対して ($\star$) と同様な式を求めよ.
 (2) (1) の結果を用いて, $\lim_{N \rightarrow \infty} (A_{kN} + B_{\ell N})$ (k, ℓ は自然数) を計算せよ.
 (3) (2) の結果を用いて, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n = \log 2$ を導け. (ヒント: $k = \ell = 1$. なぜか?)
 (4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}/n$ の項の順序を入れ換えて, (2) で得た値を和とする級数を作る方法を考えよ.