

1

(6 × 4 = 24 点)

1 階微分方程式のうち、変数分離形、1 階線形微分方程式、Bernoulli の微分方程式の問題である。解法を大雑把に復習すると、

- 変数分離形： $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. 一般解は $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$ (不定積分は任意定数を含む) で与えられる。
また、 $g(\alpha) = 0$ を満たす定数 α が存在すれば、定数関数 $y = \alpha$ も解となる (特異解となる場合がある).
 - 1 階線形微分方程式： $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. $p(x)$ の不定積分 (の 1 つ) を $P(x) = \int p(x) dx$ (積分定数は勝手に選んでよい) とおけば、一般解は $y = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx$ (不定積分は任意定数を含む) で与えられる。なお、1 階線形微分方程式には特異解は現れない。
 - Bernoulli の微分方程式： $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m$ ($m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, 1$). $z = y^{1-m}$ とおくことにより、 z の 1 階線形微分方程式となる ($m = 0, 1$ なら既にそうになっている).
- (1) $\frac{dy}{dx} = 2xy$ は変数分離形. $y \neq 0$ のとき、 $\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$ より、 $\log|y| = x^2 + C$ (C は任意定数). よって、 $y = C_1 e^{x^2}$ ($C_1 := \pm e^C \neq 0$). 一方、 $y = 0$ (定数関数) は明らかに解. 以上より、求める解は $y = C_1 e^{x^2}$ (C_1 は任意定数).
- (2) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \log x$ と変形する (1 階線形微分方程式). $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = \log x$, $P(x) := \int p(x) dx = -\log x$ ($x > 0$ に注意) とおいて、 $e^{-P(x)} = x$, $\int e^{P(x)} q(x) dx = \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$ (C は任意定数).
よって、解は $y = \frac{1}{2}x(\log x)^2 + Cx$ (C は任意定数).
- (3) $u = xy$ を新しい未知関数 (x の関数) と見る. $\frac{du}{dx} = x \frac{dy}{dx} + y = e^{-xy} = e^{-u}$ であるから、 $\int e^u du = \int dx$.
これより、 $e^u = x + C$ (C は任意定数) となり、 $u (= xy) = \log(x + C)$. よって、求める解は $y = \frac{\log(x + C)}{x}$ (C は任意定数). 【注】任意定数 C を与えるごとに解の定義域が変化する。
- (4) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{x}{y}$ は Bernoulli の微分方程式 ($m = -1$). $z = y^2$ (x の関数) とおけば、 $\frac{dz}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} = 2(-y^2 + x)$ より、 $\frac{dz}{dx} + 2z = 2x$ ((定数係数)1 階線形微分方程式). ここで、 $p(x) = 2$, $q(x) = 2x$, $P(x) = \int p(x) dx = 2x$ とおいて、 $e^{-P(x)} = e^{-2x}$, $\int e^{P(x)} q(x) dx = \int e^{2x} 2x dx = x e^{2x} - \int e^{2x} dx = \frac{2x-1}{2} e^{2x} + C$ (C は任意定数). これより、 $z = \frac{2x-1}{2} + C e^{-2x}$. (勿論、定数係数線形微分方程式に対する解き方を用いてもよい.) $z = y^2$ であつたから、求める解は $2y^2 = 2x - 1 + C_1 e^{-2x}$ ($C_1 := 2C$ は任意定数), あるいは $y = \pm \sqrt{x - \frac{1}{2} + C e^{-2x}}$ (C は任意定数).

2

(6 × 2 = 12 点)

1 階微分方程式のうち、同次形、完全微分形の問題である。解法を大雑把に復習すると、

- 同次形： $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. $z = \frac{y}{x}$ とおけば、 $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$ であるから、与えられた微分方程式は $z + x \frac{dz}{dx} = f(z)$, すなわち $\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$ と変形できる。これは変数分離形である (解法は既出).
- 完全微分形： $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. 長方形領域 D で $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ が成り立つならば、 $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ を満たす $F(x, y)$ が存在し、解が $F(x, y) = C$ (C は任意定数) で与えられる。このような F は点

$(a, b) \in D$ を任意に固定し,

$$F(x, y) = \int_a^x P(\xi, b) d\xi + \int_b^y Q(x, \eta) d\eta \left(= \int_b^y Q(a, \eta) d\eta + \int_a^x P(\xi, y) d\xi \right)$$

で与えられる.

(1) $2xy \frac{dy}{dx} = -(x^2 + y^2)$ の両辺を x^2 で割って, $\frac{2y}{x} \frac{dy}{dx} = -\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$. よって, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + (\frac{y}{x})^2}{2 \cdot \frac{y}{x}}$ となり,

これは同次形. $z = \frac{y}{x}$ とおけば, $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$ であるから,

$$x \frac{dz}{dx} + z = -\frac{1 + z^2}{2z}. \quad \therefore x \frac{dz}{dx} = -\frac{1 + z^2}{2z} - z = -\frac{3z^2 + 1}{2z} \text{ (変数分離形).}$$

このとき $\int \frac{2z}{3z^2 + 1} dz = -\int \frac{dx}{x}$ となり, $\frac{1}{3} \log|3z^2 + 1| = -\log|x| + C$ (C は任意定数). これより,

$$x^3(3z^2 + 1) = C_1 \quad (C_1 := \pm e^{3C} \neq 0). \quad \text{ここで, } z = \frac{y}{x} \text{ を代入し整理して, 求める解は } \boxed{3xy^2 + x^3 = C_1}$$

(C_1 は任意定数). 勿論, 解を $y = \pm \sqrt{\frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{3}}$ (C_2 は任意定数) の形に表現してもよい.

(2) $P(x, y) = x^2 + y^2$, $Q(x, y) = 2xy$ とおけば, 与えられた微分方程式は $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ と書ける. このとき $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ であるから, これは完全微分形. ここで, $(a, b) = (0, 0)$ として,

$$F(x, y) := \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta = \int_0^x \xi^2 d\xi + \int_0^y 2x\eta d\eta = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$$

とおけば, 求める解は $F(x, y) = C$ (C は任意定数), すなわち $\boxed{x^3 + 3xy^2 = C_1}$ ($C_1 := 3C$ は任意定数).

3

(11 × 3 = 33 点)

定数係数線形微分方程式を $F(D)y = q(x)$ ($D = \frac{d}{dx}$) の形で表すとき,

$$[F(D)y = q(x) \text{ の一般解}] = [F(D)y = q(x) \text{ の特殊解}] + [F(D)y = 0 \text{ の一般解}]$$

が成り立つ (線形微分方程式には特異解は存在しないことに注意). ここで, $[F(D)y = 0 \text{ の一般解}]$ は特性多項式 $F(t)$ の因数分解 (あるいは特性方程式 $F(t) = 0$ の根) を見ることにより得られる (詳細は教科書あるいは講義ノート参照, すぐ下の例も見よ). また, $[F(D)y = q(x) \text{ の特殊解}]$ は $\frac{1}{F(D)}q(x)$ を計算することにより得られるが, もっと簡単に計算できる場合もある ((1), (2) の中のコメント参照). $\frac{1}{F(D)}q(x)$ の計算で必ず覚えておくべき公式として次の 2 つを挙げておく:

$$\bullet \frac{1}{D-a}q(x) = e^{ax} \int e^{-ax} q(x) dx, \quad \bullet F(a) \neq 0 \text{ ならば } \frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax}.$$

念のため, 最も基本的な $F(t) = at^2 + bt + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ は定数, $a \neq 0$) の場合について, 斉次方程式 $F(D)y (= ay'' + by' + cy) = 0$ の基本解 (= 解空間の基底) および一般解について整理しておく (C_1, C_2 は任意定数を表す).

- $F(t) = 0$ が 2 つの異なる実根 α, β をもつとき, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$. 従って, 一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$.
- $F(t) = 0$ が 2 つの異なる虚根 $\gamma, \bar{\gamma}$ (共役複素数の組) をもつとき, $\gamma = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$) とおけば, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$. 従って, 一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$.
- $F(t) = 0$ が 2 重根 $\alpha \in \mathbb{R}$ をもつとき, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}$. 従って, 一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$.

(1) 与えられた微分方程式は $(2D^2 - D - 1)y = e^x$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = 2t^2 - t - 1$.

① $F(t) = (2t + 1)(t - 1)$ であるから, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^x, e^{-\frac{x}{2}}}$.

② 特殊解 $y = \frac{1}{2D^2 - D - 1}e^x$ は

$$y = \frac{1}{D-1} \left(\frac{1}{2D+1} e^x \right) = \frac{1}{D-1} \left(\frac{1}{3} e^x \right) = \frac{1}{3} e^x \int e^{-x} e^x dx = \boxed{\frac{1}{3} x e^x}.$$

あるいは部分分数分解を用いて

$$y = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D-1} e^x - \frac{2}{2D+1} e^x \right) = \frac{1}{3} \left(e^x \int e^{-x} e^x dx - \frac{2}{3} e^x \right) = \frac{1}{3} x e^x - \frac{2}{9} e^x.$$

ここで2つの特殊解の形が見かけ上 $-\frac{2}{9}e^x$ だけ異なるが、これは斉次方程式の解なので何ら問題はない(勿論、単純な形の方が扱いやすい).

③ 以上の結果から、求める一般解は $y = \left(\frac{1}{3}x + C_1 \right) e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$ (C_1, C_2 は任意定数).

(2) 与えられた微分方程式は $(4D^2 + 4D + 1)y = x^2$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = 4t^2 + 4t + 1$.

① $F(t) = (2t + 1)^2$ であるから、斉次方程式の基本解は $\boxed{e^{-\frac{x}{2}}, x e^{-\frac{x}{2}}}$.

② 特殊解 $y = \frac{1}{4D^2 + 4D + 1}x^2$ は

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1 + 4(D+1)D} x^2 = \{1 - 4(D+1)D + 16(D+1)^2 D^2\} x^2 \\ &= x^2 - 4(2 + 2x) + 16 \cdot 2 = \boxed{x^2 - 8x + 24}. \end{aligned}$$

あるいは、特殊解を $y = Ax^2 + Bx + C$ (A, B, C は定数) の形で探す方法もある(下のコメント参照). $(4D^2 + 4D + 1)(Ax^2 + Bx + C) = 4(2A) + 4(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + (8A + B)x + (8A + 4B + C)$ であるから、 $Ax^2 + (8A + B)x + (8A + 4B + C) = x^2$ が恒等式となるように $A = 1, B = -8, C = 24$ と定めればよい.

③ 以上の結果から、求める一般解は

$$\boxed{y = x^2 - 8x + 24 + (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{x}{2}}} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

【②に関するコメント】 一般に、 $F(0) \neq 0$ ならば、 $F(D)y = x^m$ の特殊解は x の m 次多項式の形で見つけることができる(上では $m = 2$ の場合を考えた).

(3) 与えられた微分方程式は $(D^3 + 1)y = e^x \sin x$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = t^3 + 1$.

① $F(t) = (t + 1)(t^2 - t + 1)$ で、 $t^2 - t + 1 = 0$ の根は $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. よって、斉次方程式の基本解は

$\boxed{e^{-x}, e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}, e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}}$. ($e^{-x}, e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x}, e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x}$ でも誤りではないが、実数関数の形の方が望ましい.)

② まず、Euler の公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて、 $e^x \sin x = \text{Im}[e^{(1+i)x}]$ ($\text{Im}[\cdot]$ は虚部を表す). この事実注意到して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^3 + 1} e^{(1+i)x} &= \frac{1}{(1+i)^3 + 1} e^{(1+i)x} = \frac{-1}{1-2i} e^{(1+i)x} = -\frac{1+2i}{5} e^x (\cos x + i \sin x) \\ &= -\frac{1}{5} e^x \{(\cos x - 2 \sin x) + i(2 \cos x + \sin x)\}. \end{aligned}$$

よって、特殊解は

$$y = \frac{1}{D^3 + 1} e^x \sin x = \text{Im} \left[\frac{1}{D^3 + 1} e^{(1+i)x} \right] = \boxed{-\frac{1}{5} e^x (2 \cos x + \sin x)}.$$

あるいは特殊解を $y = e^x (A \cos x + B \sin x)$ (A, B は定数) の形で探す方法もある(下のコメント参照). $(D^3 + 1)\{e^x (A \cos x + B \sin x)\} = -e^x \{(A - 2B) \cos x + (2A + B) \sin x\}$ であるから、 $-e^x \{(A - 2B) \cos x + (2A + B) \sin x\} = e^x \sin x$ が恒等式となるように $A = -\frac{2}{5}, B = -\frac{1}{5}$ と定めればよい.

③ 以上の結果から、求める一般解は

$$y = -\frac{1}{5}e^x(2\cos x + \sin x) + C_1e^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は任意定数}).$$

【②に関するコメント】 一般に、実係数の多項式 $F(t)$ が $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $F(a + ib) \neq 0$ を満たすならば、 $F(D)y = e^{ax} \cos bx$ (or $e^{ax} \sin bx$) の特殊解は、 $y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$ (A, B は定数) の形で見つかる (上では $a = b = 1$ の場合を考えた).

4

(7 × 2 = 14 点)

(1) まず、 $y = y(t) := x'(t)$ が $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ を満たすことに注意する. $y' = 1 + y^2$ より

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt, \quad \text{従って} \quad \tan^{-1}y = t + C_1.$$

ここで初期条件 $y(0) = 0$ を用いて $C_1 = 0$ となるので、 $\tan^{-1}y = t$, $y = \tan t$. これを積分して、

$$x = \int \tan t \, dt = \int \frac{-(\cos t)'}{\cos t} \, dt = -\log(\cos t) + C_2.$$

(ここで $-\log|\cos t|$ と書かなかったのは、今考えているのは $t = 0$ の近傍であり、そこでは $\cos t > 0$ となるからである.) $x(0) = 0$ より $C_2 = 0$ となり、求める解は $x = -\log(\cos t)$.

(2) まず、 $y = y(t) := x'(t)$ が $y' = 1 - y^2$, $y(0) = 0$ を満たすことに注意する. $y' = 1 - y^2$ より

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \int dt, \quad \text{従って} \quad \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} = t + C_1.$$

ここで初期条件 $y(0) = 0$ を用いて $C_1 = 0$ を得る. (上式の対数の真数部分で絶対値を用いないのは、 $y = 0$ の近傍で $\frac{1+y}{1-y} > 0$ となるからである.) よって、 $\frac{1+y}{1-y} = e^{2t}$ となり、 y について解けば、

$$y = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \tanh t.$$

これを積分して、

$$x = \int \tanh t \, dt = \int \frac{(\cosh t)'}{\cosh t} \, dt = \log(\cosh t) + C_2 \quad \left(\text{あるいは、} x = \int \frac{(e^t + e^{-t})'}{e^t + e^{-t}} \, dt \right).$$

$x(0) = 0$ より $C_2 = 0$ となり、求める解は $x = \log(\cosh t)$ (あるいは、 $x = \log(e^t + e^{-t}) - \log 2$).

【補足】 次のように考えることもできる (細かい計算は同じ). 上と同じで $y(t) = x'(t)$ とする.

(1) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$ より、 $\int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^t dt$. これより、 $\tan^{-1}y = t$, すなわち $y = \tan t$. 次に、 $x' = \tan t$, $x(0) = 0$ より、 $x = \int_0^t \tan t \, dt = -\log(\cos t)$.

(2) $y' = 1 - y^2$, $y(0) = 0$ より、 $\int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \int_0^t dt$. これより、 $\frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y} = t$, すなわち $y = \tanh t$. 次に、 $x' = \tanh t$, $x(0) = 0$ より、 $x = \int_0^t \tanh t \, dt = \log(\cosh t)$.

5

(6 + 6 + 5 = 17 点)

(1) 斉次方程式 $u''(t) + k^2 u(t) = 0$ の特性多項式は $F(\lambda) = \lambda^2 + k^2$ (変数として λ を用いた). $\lambda^2 + k^2 = 0$ の根は $\lambda = \pm ik$ であるから、斉次方程式の一般解は

$$u(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

(2) $(D^2 + k^2)u(t) = \sin \omega t$ ($D = d/dt$) の特殊解 $\frac{1}{D^2 + k^2} \sin \omega t = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{D^2 + k^2} e^{i\omega t} \right]$ を計算する.

- $k \neq \omega$ のとき, $\frac{1}{D^2 + k^2} e^{i\omega t} = \frac{1}{(i\omega)^2 + k^2} e^{i\omega t} = \frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$ より,

$$\frac{1}{D^2 + k^2} \sin \omega t = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{k^2 - \omega^2} e^{i\omega t} \right] = \boxed{\frac{1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t}.$$

- $k = \omega$ のとき,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + k^2} e^{i\omega t} &= \frac{1}{D^2 + \omega^2} e^{i\omega t} = \frac{1}{D - i\omega} \left(\frac{1}{D + i\omega} e^{i\omega t} \right) = \frac{1}{D - i\omega} \left(\frac{1}{2i\omega} e^{i\omega t} \right) \\ &= \frac{1}{2i\omega} e^{i\omega t} \int e^{-i\omega t} e^{i\omega t} dt = -\frac{1}{2\omega} it e^{i\omega t} \end{aligned}$$

より,

$$\frac{1}{D^2 + k^2} \sin \omega t = \frac{1}{D^2 + \omega^2} \sin \omega t = \operatorname{Im} \left[-\frac{1}{2\omega} it e^{i\omega t} \right] = \boxed{-\frac{1}{2\omega} t \cos \omega t}.$$

(3) (1), (2) の結果を用いて,

- $k \neq \omega$ のとき, $(*)$ の一般解は $u(t) = \frac{1}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t + C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$. 初期条件により,

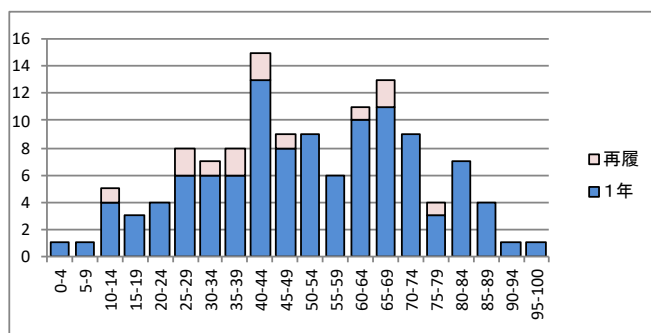
$$u(0) = C_1 = 0, \quad u'(0) = \frac{\omega}{k^2 - \omega^2} + C_2 k = 0. \quad \therefore C_2 = -\frac{\omega}{k(k^2 - \omega^2)}.$$

よって, 初期値問題の解は $u(t) = \boxed{\frac{1}{k(k^2 - \omega^2)} (k \sin \omega t - \omega \sin kt)}.$

- $k = \omega$ のとき, $(*)$ の一般解は $u(t) = -\frac{1}{2\omega} t \cos \omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$. 初期条件により,

$$u(0) = C_1 = 0, \quad u'(0) = -\frac{1}{2\omega} + C_2 \omega = 0. \quad \therefore C_2 = \frac{1}{2\omega^2}.$$

よって, 初期値問題の解は $u(t) = \boxed{\frac{1}{2\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)}.$



	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	113	51.8	21.4	97
再履	13	44.6	18.6	77