

1

(5 点 × 3 = 15 点)

正項級数 $\sum a_n$ の収束判定の問題. 判定には次の方法が基本的である.

- ① 正項級数に限らない事実であるが, $\sum a_n$ が収束すれば必ず $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ が成り立つ. 従って, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でない (すなわち, $\{a_n\}$ の極限が存在しない, または 0 以外の極限をもつ) ならば, $\sum a_n$ は発散する.
- ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ または $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ が存在するとき (後の極限が存在すれば前の極限も存在し一致する),
 $\rho < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束し, $\rho > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

前の “ n 乗根の極限” を用いる方法を ^{コーシー}Cauchy の判定法 (root test), 後の “比の極限” を用いる方法を ^{ダランベール}d'Alembert の判定法 (ratio test) と呼ぶ. 証明は公比 ρ の等比級数と比較することによってなされる.

- ② $f(x)$ が $x \geq 1$ で正値かつ単調減少のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束 (発散) } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty (= \infty).$$

この方法は積分判定法 (integral test) または ^{オイラー・マクローリン}Euler-Maclaurin の判定法と呼ばれる. ① で $\rho = 1$ となる場合の収束判定に有効なことが多い. 証明は不等式 $\int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(x) dx$ の極限形 $\int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$ を見れば明らか.

- (1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{\infty} = \infty$ であるから, 積分判定法により $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は **発散** する.

- (2) $a_n = \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$ とおく. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{5^{n+1} ((n+1)!)^2} \cdot \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{5(n+1)^2} = \frac{4}{5} \frac{n + \frac{1}{2}}{n+1} \rightarrow \frac{4}{5} < 1$
 $(n \rightarrow \infty)$ であるから, d'Alembert の判定法により, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は **収束** する.

- (3) $b_n = a^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}$ とおく. $\sqrt[n]{b_n} = a \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = a \left\{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n/2}\right\}^2 \rightarrow ae^2 (n \rightarrow \infty)$ であるから, Cauchy の判定法により, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は $0 < a < \frac{1}{e^2}$ のとき収束し, $a > \frac{1}{e^2}$ のとき発散する. 最後に, $a = \frac{1}{e^2}$ のとき, $\log b_n = -2n + n^2 \log \left(1 + \frac{2}{n}\right) = -2n + n^2 \left\{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\} = -2 + o(1)$ であるから, $b_n \rightarrow \frac{1}{e^2} > 0 (n \rightarrow \infty)$. このとき級数は発散するので, 以上をまとめて, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は $0 < a < \frac{1}{e^2}$ のとき収束し, $a \geq \frac{1}{e^2}$ のとき発散する.

2

(8 点 × 3 = 24 点) … 収束半径が 4 点, 収束区間については端点での収束の吟味がないものは採点せず.

整級数の**収束半径**と**収束区間**を求める問題. 整級数 $\sum a_n x^n$ に対して,

$$|x| < r \text{ ならば収束し, } |x| > r \text{ ならば発散する}$$

を満たす $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ を**収束半径**と呼ぶ. この量は $r = \sup \{|x| \mid \sum a_n x^n \text{ が収束する}\}$ で与えられる (x の動く範囲が $\mathbb{R}$ であっても $\mathbb{C}$ であっても r の値は変わらない). 特に, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ または $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ が存在するとき, $r = \frac{1}{\rho}$ が成り立つ. (この事実は正項級数 $\sum |a_n x^n| = \sum |a_n| |x|^n$ が収束するための条件を考えることにより容易に示される.) 一方, **収束区間**とは集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ が収束する}\}$ のことであるが, 収束区間を決定する際に問題となるのは ‘端点’ $x = \pm r$ が含まれるかどうかだけである ($|x| < r$ なら x は収束区間に属し, $|x| > r$ なら属さないことは収束半径の定義より明らか). 端点での収束判定には, 積分判定法や**交項級数** (正負の項が交互に現れる級数) の収束条件がよく用いられる. 一般に, 交項級数 $\sum b_n$ に対して, $|b_n| \geq |b_{n+1}| \rightarrow 0$ (すなわち数列 $\{|b_n|\}$ が**単調減少**で**0 に収束**する) ならば, $\sum b_n$ は収束する.

(1) $a_n = \frac{1}{2^n \log n}$ とおけば,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^n \log n}{2^{n+1} \log(n+1)} = \frac{1}{2} \frac{\log n}{\log n + \log \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

より, 収束半径は $r = \frac{1}{1/2} = [2]$. 次に, 端点での級数の収束発散を調べる. $x = 2$ のとき級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ となるが, $x > 1$ において $0 < \log x < \log(1+x) < x$ より $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\log x} \geq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_2^{\infty} = \infty$ となり, 積分判定法によりこの級数は発散する. (あるいは, $x > 1$ のとき, $0 < \log x \leq x \log x$ であるから, $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\log x} \geq \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = [\log(\log x)]_2^{\infty} = \infty$ と計算してもよい.) また, $x = -2$ では級数は交項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ となるが, $\left| \frac{(-1)^n}{\log n} \right| = \frac{1}{\log n}$ が $(n$ について) 単調減少で 0 に収束するので, この交項級数は収束する. よって, 収束区間は $[-2 \leq x < 2]$.

(2) $a_n = \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}}$ とおけば, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}} \cdot \frac{n\sqrt{n}}{(-3)^n} \right| = 3 \left(\frac{n}{n+1} \right)^{3/2} \rightarrow 3 \quad (n \rightarrow \infty)$ であるから, 収束半径は $r = \left[\frac{1}{3} \right]$. 次に, 端点 $x = \pm \frac{1}{3}$ では, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} \left(\pm \frac{1}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^n}{n\sqrt{n}}$. ここで,

$$\left| \frac{(\mp 1)^n}{n\sqrt{n}} \right| = \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{x}} \right]_1^{\infty} = 2 < \infty$$

より, 積分判定法により, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^n}{n\sqrt{n}}$ は (絶対) 収束する. よって, 収束区間は $\left[-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \right]$.

(3) まず, $y = x^2$ において, 変数 y に関する整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{4^n + 2n}$ の収束半径 r' を求める. $b_n = \frac{1}{4^n + 2n}$ とおくと, $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{4^n + 2n}{4^{n+1} + 2(n+1)} = \frac{1 + 2n \cdot 4^{-n}}{4 + 2(n+1) \cdot 4^{-n}} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty)$ であるから, $r' = \frac{1}{1/4} = 4$. よって, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n + 2n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{4^n + 2n}$ の収束半径は $r = \sqrt{r'} = [2]$. 次に, 端点 $x = \pm 2$ での級数は, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm 2)^{2n+1}}{4^n + 2n} = \pm 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + 2n \cdot 4^{-n}}$. ここで $\frac{1}{1 + 2n \cdot 4^{-n}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$ であるから, この級数は発散する. よって, 収束区間は $[-2 < x < 2]$.

3

(6 点 $\times$ 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開を求める問題. $\frac{1}{1+x}$, e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ といった重要な関数の整級数展開は常識とすべきである. また, 整級数に対して (収束半径の内側で) **項別微分**, **項別積分** が許されるという事実もよく利用される.

(1) $\log(2-x) = \log 2 + \log\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$, 収束半径は $[2]$.
(問われていないが, 収束区間は $-2 \leq x < 2$.)

(2) $\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$ (収束半径は $1/2$) を項別微分して,

$$-\frac{2}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-2)^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-2)^{n+1} x^n.$$

$$\therefore \frac{1}{(1+2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-2)^n x^n, \quad \text{収束半径は } [1/2]. \quad (\text{収束区間は } -1/2 < x < 1/2.)$$

【別法】一般 2 項係数を用いれば,

$$\frac{1}{(1+2x)^2} = (1+2x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} 2^n x^n \quad (|2x| < 1 \text{ のとき収束}).$$

ここで, $\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!} = (n+1)(-1)^n$ より,

$$\frac{1}{(1+2x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-2)^n x^n, \quad \text{収束半径は } 1/2.$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 &= \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} \right\} \\ &= \frac{1}{2x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} 4^n x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1} 4^{n-1}}{(2n)!} x^{2(n-1)} \quad (x=0 \text{ は除きうる特異点}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n}, \quad \text{収束半径は } \boxed{\infty}. \quad (\text{収束区間は } -\infty < x < \infty.) \end{aligned}$$

4

(6 点 $\times$ 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開の最初の何項かを求める問題. よく知られた整級数展開を用いて計算する. 勿論,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \cdots$$

を用いてもよいが, 計算が複雑になってしまう場合があるので注意を要する.

$$(1) \quad \sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1) \text{ を用いて,}$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}x + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2!}x^2 + \cdots = \boxed{1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2} + \cdots.$$

【別法】 $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ とおけば, $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$. これより, $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$ であるから,

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \cdots.$$

$$(2) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ を用いて,}$$

$$\begin{aligned} e^{-x} \cos x &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right) \quad (x^2 \text{ の係数が } 0 \text{ になるので } x^3 \text{ の項までとる}) \\ &= 1 - x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \cdots = \boxed{1 - x + \frac{1}{3}x^3} + \cdots. \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{まず, } \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \text{ を用いて,}$$

$$\log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots. \quad (x=0 \text{ は除きうる特異点})$$

$$\text{これより, } (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots}$$

$$\begin{aligned} &= e \left\{ 1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} + \cdots \right)^2 + \cdots \right\} \\ &= e \left\{ 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right) x^2 + \cdots \right\} = \boxed{e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2} + \cdots. \end{aligned}$$

5

(5 点 $\times$ 2 = 10 点)

(1) 級数 $\sum a_n$ が**交項級数**であるとは, 数列 $\{a_n\}$ に正負の数が交互に並ぶことを意味する. (より具体的に, 任意の番号 n に対して $a_n a_{n+1} < 0$ となるような級数であると言ってもよい.) 交項級数 $\sum a_n$ が収束するための十分条件としては「数列 $\{|a_n|\}$ が単調減少かつ 0 に収束すること」がよく用いられる.

(2) $\sum |a_n|$ が収束するとき, $\sum a_n$ は **絶対収束** するという. また, $\sum a_n$ 自身は収束するが, $\sum |a_n|$ が発散するとき, $\sum a_n$ は **条件収束** するという. 絶対収束する級数の重要な性質を2つ挙げると,

- 絶対収束する級数は収束する.
- $\sum a_n$ が絶対収束するときは, $\{a_n\}$ を勝手に並べ替えて作った数列 $\{\tilde{a}_n\}$ に対する級数 $\sum \tilde{a}_n$ も絶対収束し, しかも最初の級数と同じ和をもつ.

【注意】上の2番目の性質において「勝手に」の箇所を「適当に」と書いている答案が何枚もあったが, これは誤りである. 日常語としての「適当に」には, 「適切に」と「いい加減に」という2通りの使い方があるが, 学術用語としては「適切に」「うまく選んで」という前者の意味しか持たないことに注意せよ.

6

(5点 × 3 = 15点)

(1) 関数項級数の一様収束を調べる際に ワイエルシュトラッス Weierstrass の判定法 (M-test) がよく用いられる.

$$\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2 < \infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束する.

(2) (1) の結果より, $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数を定め, 項別積分が許される:

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{t^2 + n^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{-1} \frac{x}{n}.$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ を形式的に項別微分して得られる関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(x^2 + n^2)^2}$ についても,

$$\left| \frac{-2x}{(x^2 + n^2)^2} \right| = \frac{2|x|}{x^2 + n^2} \cdot \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + n^2} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2 < \infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, $\mathbb{R}$ 上で一様収束し, 連続関数を定めることがわかる. 従って, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であって, 項別微分が許される:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(x^2 + n^2)^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{(x^2 + n^2)^2}.$$

【補足】関数列 $\{f_n\}$ が区間 I 上で **各点収束** するとは, 各 $x \in I$ に対して, $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在することをいう. ここで定まる I 上の関数 f を $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の **極限関数** と呼ぶ. 関数列 $\{f_n\}$ が I 上で **一様収束** するとは, 極限関数 f が存在し,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることをいう (講義では左辺を $\|f_n - f\|$ or $\|f_n - f\|_{\infty}$ と書いた). このとき, 次が成り立つ.

- 各 f_n が I 上で連続ならば, 極限関数 f も I 上で連続となる.
- 各 f_n が I 上で C^1 級で $\{f'_n\}$ が一様収束するならば, f も I 上で C^1 級で, 極限と積分の順序交換が許される: $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.
- I が閉区間, 各 f_n が I 上で連続なら, 極限と積分の順序交換可能: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$.

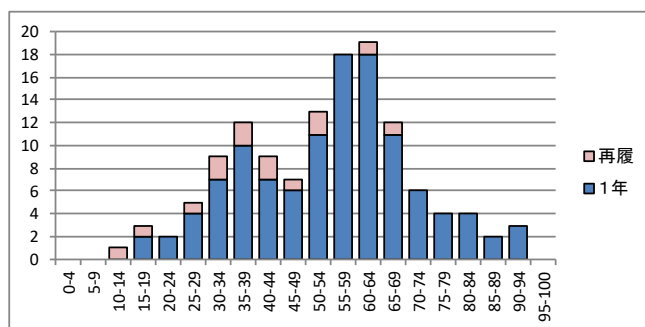
関数項級数 $\sum f_n$ に対して, 部分和関数列 $\{F_N\}$ (F_N は $F_N(x) = \sum_{n \leq N} f_n(x)$ で定める) が I 上で一様収束するとき, $\sum f_n$ は I 上で一様収束するという. このとき $\{F_N\}$ の極限関数を $\sum f_n$ 自身で表す. 関数項級数の一様収束については **Weierstrass の判定法 (M-test)** が大変有用である:

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad (\forall x \in I) \quad \text{かつ} \quad \sum M_n < \infty \quad \text{ならば,} \quad \sum f_n \text{ は } I \text{ 上で一様収束する.}$$

また, $\sum f_n$ が I 上で一様収束するとき, (一様収束する関数項級数の性質に応じて) 次が成り立つ.

- 各 f_n が I 上で連続ならば, $\sum f_n$ も I 上で連続となる.

- 各 f_n が I 上で C^1 級で $\sum f'_n$ が一様収束するならば, $\sum f_n$ も I 上で C^1 級で, 項別微分可能:
 $\{\sum f_n(x)\}' = \sum f'_n(x)$.
- I が閉区間で, 各 f_n が I 上で連続ならば, 項別積分可能: $\int_I \sum f_n(x) dx = \sum \int_I f_n(x) dx$.



	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	115	55.0	16.8	94
再履	14	39.3	15.4	65