

答だけでなくその根拠も書いて下さい。解答する順序は問いません。

1 次の正項級数の収束, 発散を調べよ. 但し, a は正の定数とする.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}$

2 次の整級数の収束半径および収束区間 (= 実数の範囲での収束域) を求めよ.

(1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \log n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n\sqrt{n}} x^n$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n + 2n}$

3 次の関数の $x = 0$ における整級数展開 (Maclaurin 展開) を求めよ. また, その整級数展開の収束半径を答えよ.

(1) $\log(2 - x)$

(2) $\frac{1}{(1 + 2x)^2}$

(3) $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$

4 次の関数の $x = 0$ における整級数展開の最初の 0 でない 3 項を求めよ. (例えば, $\frac{1}{1 - x^2}$ なら $1 + x^2 + x^4$ と答える.)

(1) $\sqrt[3]{1 + x}$

(2) $e^{-x} \cos x$

(3) $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$

5 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について次の問いに答えよ.

(1) 交項級数の定義を述べよ. また, 交項級数が収束するための十分条件を (1 つ) 挙げよ.

(2) 級数の絶対収束, 条件収束の定義を述べよ. また, 絶対収束する級数の重要な性質を 2 つ挙げよ.

6 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) について次の問いに答えよ.

(1) この関数項級数が $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ. (使用する判定法の名称も記せ.)

以下, この関数項級数が定める $\mathbb{R}$ 上の関数を $f(x)$ とする.

(2) $f(x)$ の原始関数 $\int_0^x f(t) dt$ を関数項級数の形で表せ.

(3) $f(x)$ が C^1 級であることを示し, $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を関数項級数の形で表せ.