1.2　Fourier 級数の一様収束

$\boxed{1}$ 関数列の一様収束

$\boxed{2}$ Fejér の定理

$\boxed{3}$ Dirichlet の定理

$\boxed{1}$ 関数列の一様収束

定義 (数列 $\{a_n\}$, 級数 $\sum a_n$ の収束・発散)

(1) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が a $(\in \mathbb{C})$ に収束する

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists n_1\ \forall n:\ \ n \geqslant n_1 \ \Rightarrow\ |a_n - a| < \varepsilon$$

すなわち,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 $n_1 = n_1(\varepsilon)$ を適当にとれば,

$n \geqslant n_1$ なるすべての番号 n で $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ.

(2) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ が「A に収束する」あるいは「和 $A = \sum a_n$ をもつ」

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分和 $\displaystyle A_N := \sum_{n\leqslant N} a_n$ の作る数列 $\{A_N\}$ が A に収束する

(3) 発散 = 収束しない

定義 級数 $\sum a_n$ に対して

(1) $\sum a_n$ が絶対収束する $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\sum |a_n|$ が収束する.

(2) $\sum a_n$ が条件収束する $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\sum a_n$ が収束し, $\sum |a_n|$ が発散する.

定理 2.1 (絶対収束級数の性質)

(1) 絶対収束級数は収束する.

(2) $\sum a_n$ が絶対収束し, 和 A をもつ.

$\Rightarrow$ $\{a_n\}$ を勝手な順に並べた級数も絶対収束し, 和 A をもつ.

(3) $\sum a_n$, $\sum b_n$ が絶対収束し, それぞれ和 A, B をもつ.

$\Rightarrow$ $\{a_l b_m\}$ を勝手な順に並べた級数も絶対収束し, 和 AB をもつ.

定義 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ に対して,

(1) $\{f_n\}$ が I 上で各点収束 (または単純収束) する

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 $x \in I$ において $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在する

(I 上の関数 $f(x) := \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を $\{f_n\}$ の極限関数と呼ぶ)

$$\Big(\ \Leftrightarrow\quad \forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1\ \forall n:\ n \geqslant n_1 \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \Big)$$

(2) $\{f_n\}$ が I 上で f に一様収束する

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\displaystyle\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0\ \ (n \to \infty)$

$$\Big(\ \Leftrightarrow\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1\ \forall x \in I\ \forall n:\ n \geqslant n_1 \ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \Big)$$

定理 2.2　関数列 $\{f_n\} \subset C(I)$ に対して,

$$\{f_n\} \text{ が } I \text{ 上で一様収束} \quad \Rightarrow \quad \text{極限関数 } f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C(I).$$

［証］　任意の点 $x_0 \in I$ における f の連続性を示す. $\varepsilon > 0$ を任意に固定する. $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ より, n_1 を十分大きくとれば, $\|f_{n_1} - f\|_\infty < \varepsilon/3$. よって,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| + |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant 2\,\|f_{n_1} - f\|_\infty + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)|. \end{aligned}$$

ここで, $f_{n_1} \in C(I)$ より,

$$\begin{aligned} \exists\delta > 0\, \forall x \in I:\ \ |x - x_0| < \delta \quad &\Rightarrow \quad |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &\Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

これは $f(x)$ の x_0 での連続性を意味する. $\square$

定理 2.3 $I=[a,b]$ 上の関数列 $\{f_n\}\subset C(I)$ について,

(1) ［極限と積分の順序交換］

$$\{f_n\} \text{ が一様収束} \quad\Rightarrow\quad \int_a^b \Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

(2) ［項別積分］

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ が一様収束} \quad\Rightarrow\quad \int_a^b \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Bigr)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

[証] (1) のみを示す. $\{f_n\}$ の極限関数を f とすれば,

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| &\leqslant \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx\\ &\leqslant (b-a)\|f_n-f\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

□

定理 2.4 関数列 $\{f_n\} \subset C^1(I)$ に対して,

(1) ［極限と微分の順序交換］

I 上で $\{f_n'\}$ が一様収束し, $\{f_n\}$ が各点収束する

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \qquad (f := \lim f_n \in C^1(I))$$

(2) ［項別微分］

I 上で $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ が一様収束し, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が各点収束する

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \qquad (F := \sum f_n \in C^1(I))$$

[証]　(1) のみを示す. $\{f_n\}, \{f'_n\}$ の極限関数をそれぞれ f, g とする. $\forall a, x_1 \in I$ に対して, $\{f'_n\}$ は $[a, x_1]$ (または $[x_1, a]$) 上で g に一様収束するので, 定理 2.3 (1) より,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_1} f'_n(x)\,dx = \int_a^{x_1} g(x)\,dx.$$

一方, $\{f_n\}$ は I 上で f に収束するので,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{x_1} f'_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\bigl(f_n(x_1) - f_n(a)\bigr) = f(x_1) - f(a)$$

よって, $f(x_1) - f(a) = \displaystyle\int_a^{x_1} g(x)\,dx$.　x_1 で微分して, $f'(x) = g(x)$.　$\square$

定理 2.5 (Weierstrass の M テスト)

区間 I 上の関数項級数 $\sum f_n$ に対して，

$$\|f_n\|_\infty \leqslant M_n \ (\forall n) \quad \text{かつ} \quad \sum M_n < \infty$$

を満たす数列 $\{M_n\}$ が存在すれば，$\sum f_n$ は I 上で一様収束する．

[証] 各 $x \in I$ において，$\sum |f_n(x)| \leqslant \sum M_n < \infty$ より，$\sum f_n(x)$ は絶対収束する．
$F_N := \sum_{n \leqslant N} f_n$ および $F := \sum f_n$ (極限関数) に対して，

$$|F_N(x) - F(x)| = \Big| \sum_{n \geqslant N+1} f_n(x) \Big| \leqslant \sum_{n \geqslant N+1} |f_n(x)| \leqslant \sum_{n \geqslant N+1} M_n.$$

$x \in I$ の任意性および $\sum M_n < \infty$ により，

$$\|F_N - F\|_\infty \leqslant \sum_{n \geqslant N+1} M_n \to 0 \quad (N \to \infty).$$

□

◆ 整級数への応用

定理 2.6 整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径を $r \in (0, \infty]$ とする:

$$r := \sup\left\{|x| \;\middle|\; \sum a_n x^n \text{ が収束 } (x \in \mathbb{C})\right\} = \frac{1}{\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(1) $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r$ で C^∞ 級.

(2) [項別微分]

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (\text{ 収束半径} = r).$$

(3) [項別積分]

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n \quad (\text{ 収束半径} = r).$$

[証] *Step 1.* まず, $f(x)=\sum a_n x^n$ の $|x|<r$ での連続性を示す. $r_1 \in (0,r)$ を任意に固定するとき, この整級数は仮定により $|x_0| \in (r_1, r)$ なる適当な x_0 で収束するから, $|a_n x_0^n| \leqslant M \ \ (\forall n)$ を満たす正数 M が存在し,

$$|x| \leqslant r_1 \quad \Rightarrow \quad |a_n x^n| \leqslant |a_n| r_1^n = |a_n x_0^n| \left(\frac{r_1}{|x_0|}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r_1}{|x_0|}\right)^n.$$

$\sum (r_1/|x_0|)^n < \infty$ であるから, Weierstrass の M テストにより, $\sum a_n x^n$ は $|x| \leqslant r_1$ で一様収束する. 定理 2.2 (2) より, $f(x)=\sum a_n x^n$ は $|x| \leqslant r_1$ で連続, $r_1<r$ の任意性により $|x|<r$ で連続となる.

Step 2. 再び $r_1 \in (0,r)$ を任意に固定する. 上の結果と定理 2.3 (2) より,

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad (|x| \leqslant r_1).$$

$r_1<r$ の任意性により, この関係式は $|x|<r$ で成り立つ.

Step 3. $r_2 \in (0, r)$ を任意に固定し, $r_1 \in (r_2, r)$ をとる. $|x| \leqslant r_2$ のとき,

$$|na_n x^{n-1}| \leqslant n|a_n|r_2^{n-1} \leqslant \frac{n}{r_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \cdot |a_n|r_1^n \leqslant M'|a_n|r_1^n.$$

ここで, $n(r_2/r_1)^n \to 0$ より正数 M' がとれた. $\sum |a_n| r_1^n < \infty$ であったから, Weierstrass の M テストにより, $\sum na_n x^{n-1}$ は $|x| \leqslant r_2$ で一様収束する. $\sum a_n x^n$ も $|x| \leqslant r_2$ で一様収束する (Step 1) ので, 定理 2.4 (2) を適用して,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad (|x| \leqslant r_2).$$

$r_2 < r$ の任意性により, この関係式は $|x| < r$ で成り立つ. これを繰り返すことにより, $f(x)$ が $|x| < r$ で C^∞ 級であることがわかる.

Step 4. $\sum na_n x^{n-1}, \sum a_n x^{n+1}/(n+1)$ の収束半径をそれぞれ r', r'' とすれば, 上の議論より $r' \geqslant r$, $r'' \geqslant r$. 逆に, $\sum a_n x^n$ は $\sum na_n x^{n-1}$, $\sum a_n x^{n+1}/(n+1)$ をそれぞれ項別積分 (定数 a_0 を足す), 項別微分したものと考えられるから, $r \geqslant r'$, $r \geqslant r''$. 従って, $r = r' = r''$. $\square$

$\boxed{2}$ Fejér の定理

◆ Fourier 級数の基本問題

$$\boxed{(S_N f)(t) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad \overset{?}{\longrightarrow} \quad f(t) \quad (N \to \infty)}$$

ここで,

$$(S_N f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-ins} \, đs \right) e^{int} = \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=-N}^{N} e^{in(t-s)} \right) f(s) \, đs$$

$$= \int_{\mathbb{T}} D_N(t-s) f(s) \, đs = \int_{\mathbb{T}} D_N(s) f(t-s) \, đs.$$

$D_N(t) := \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} e^{int}$ を Dirichlet 核と呼ぶ.

$$
\begin{aligned}
D_N(t) &= e^{-iNt} \cdot \frac{1-(e^{it})^{2N+1}}{1-e^{it}} \\
&= e^{-iNt} \cdot \frac{e^{i(N+1/2)t}}{e^{it/2}} \cdot \frac{e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\
&= \boxed{\frac{\sin((N+1/2)t)}{\sin(t/2)}}
\end{aligned}
$$

《注》 Dirichlet 核の正弦関数による表現式において, 分母が 0 となるときは極限値で置き換える. ($D_N(0) = 2N+1$)

◆ Fejér の定理

$S_N f$ の収束を調べる前段として

$$(\sigma_N f)(t) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} (S_n f)(t)$$

の収束を考える．ここで，

$$\begin{aligned}(\sigma_N f)(t) &= \frac{1}{N+1} \int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{n=0}^{N} D_n(t-s) \Big) f(s)\, đs \\ &= \int_{\mathbb{T}} F_N(t-s) f(s)\, đs = \int_{\mathbb{T}} F_N(s) f(t-s)\, đs.\end{aligned}$$

$F_N(t) := \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} D_n(t)$ を Fejér 核と呼ぶ．

【問 2.1】 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について

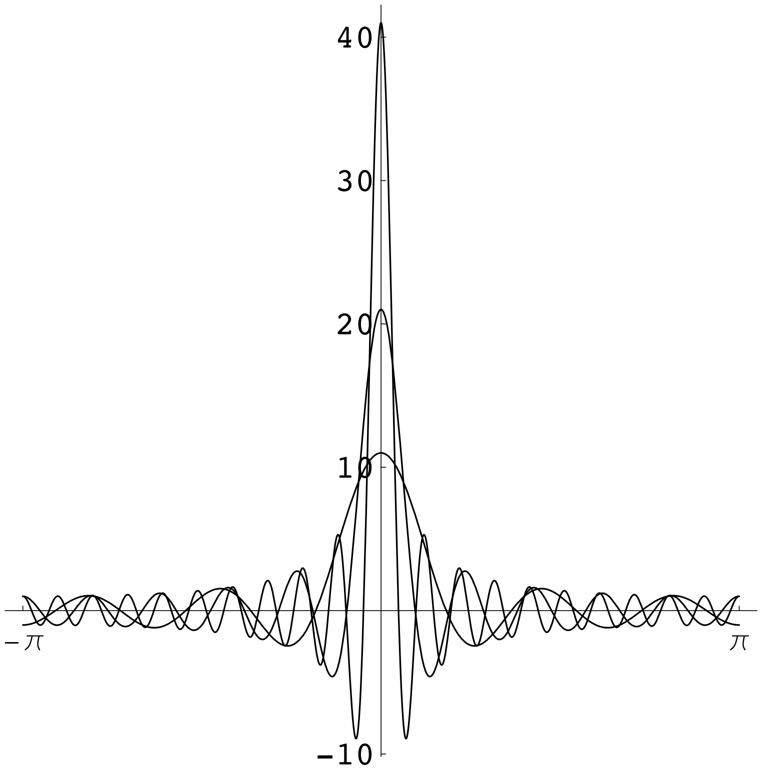
$$a_n \to \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} a_n \to \alpha \quad (\text{Cesàro 和})$$

を示せ. また, $\Leftarrow$ に対する反例を挙げよ.

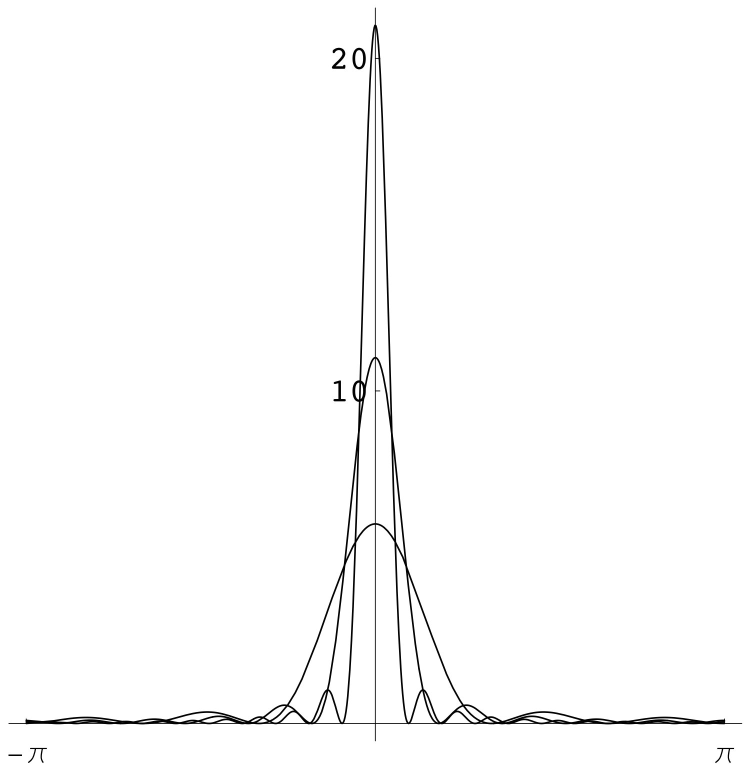
【問 2.2】* 次を示せ.

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n(t) = \boxed{\frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(N+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2}$$

(ヒント: $D_N(t)$ の表現式で $\sin{(N+\frac{1}{2})t} = \operatorname{Im} e^{i(N+\frac{1}{2})t}$)



$D_N(t)$ のグラフ $(N = 5, 10, 20)$



$F_N(t)$ のグラフ $(N = 5, 10, 20)$

定理 2.7 (Fejér の定理)

$$f \in C(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sigma_N f \to f \quad (\text{一様収束})$$

従って, $f \in C(\mathbb{T})$ は Fourier 係数 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ から復元される.

系 2.8 $f,\ g \in C(\mathbb{T})$ とする.

(1) $c_n(f) = c_n(g)\ \ (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad f = g$

(2) 各 $\varepsilon > 0$ に対し, $\|p_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$ を満たす三角多項式 p_ε が存在.

系 2.8 は定理 2.7 から容易に得られる. ($\sigma_N f$ は三角多項式！)

[証] (定理 2.7) — 証明法も重要

Step 1. まず, $F_N(t)$ は次の性質をもつことに注意:

① $F_N(t) \geqslant 0 \ \ (t \in \mathbb{T})$.

② $\forall \delta \in (0,\pi)$ に対し, $\displaystyle\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} F_N(t)\,dt \to 0 \ \ (N \to \infty)$.

③ $\displaystyle\int_{\mathbb{T}} F_N(t)\,đt = 1$.

実際, ①は明らか. ②は

$$0 \leqslant F_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin\frac{(N+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 \ \ (\delta \leqslant |t| \leqslant \pi)$$

より容易にわかる. ③はもとの定義式に戻って

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t)\,đt = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\int_{\mathbb{T}} D_n(t)\,đt = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\int_{\mathbb{T}} e^{ikt}\,đt = 1.$$

Step 2. $f \in C(\mathbb{T})$ は $\mathbb{T}$ 上で一様連続, すなわち

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t\ \forall t_1 \in \mathbb{T}:\ |t - t_1| < \delta \ \Rightarrow\ |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ を任意に固定し, $\delta > 0$ を上のように小さく選んでおく.

$$\begin{aligned}(\sigma_N f)(t_1) - f(t_1) &= \int_{\mathbb{T}} F_N(s) f(t_1 - s)\, đs - f(t_1) \int_{\mathbb{T}} F_N(s)\, đs \\ &= \left(\int_{|s|<\delta} + \int_{\delta \leqslant |s| \leqslant \pi} \right) F_N(s) \big(f(t_1 - s) - f(t_1) \big)\, đs\end{aligned}$$

において,

$$\begin{aligned}&\left| \int_{|s|<\delta} F_N(s) \big(f(t_1 - s) - f(t_1) \big)\, đs \right| \\ &\qquad \leqslant \int_{|s|<\delta} F_N(s) \left| f(t_1 - s) - f(t_1) \right| đs \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{T}} F_N(s)\, đs = \varepsilon,\end{aligned}$$

$$\left| \int_{\delta \leqslant |s| \leqslant \pi} F_N(s) \big(f(t_1 - s) - f(t_1) \big) \, đs \right| \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{\delta \leqslant |s| \leqslant \pi} F_N(s) \, đs.$$

これより,

$$|(\sigma_N f)(t_1) - f(t_1)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\delta \leqslant |s| \leqslant \pi} F_N(s) \, đs.$$

更に N_1 を十分大きくとれば, $t_1 \in \mathbb{T}$ の任意性により,

$$N \geqslant N_1 \quad \Rightarrow \quad \|\sigma_N f - f\|_\infty \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

これは, $\lim_{N \to \infty} \|\sigma_N f - f\|_\infty = 0$ (一様収束) を意味する. $\square$

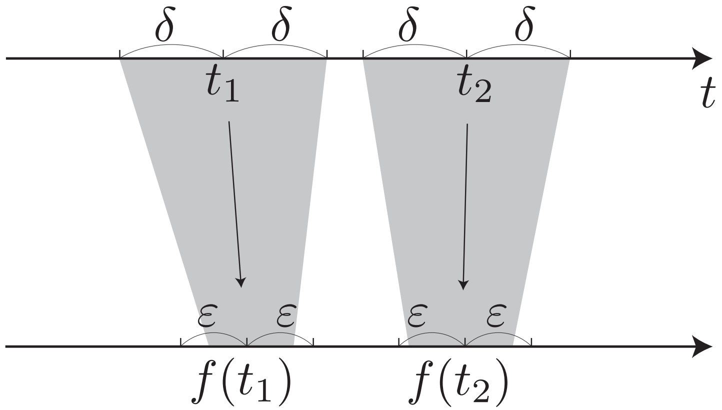
《注》 (連続と一様連続)

関数 f が区間 I 上で<u>連続</u>であるとする．これを “ε-δ 論法” で述べれば,

$$\forall t_1 \in I \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall t \in I: \;\; |t - t_1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

特に I が<u>有界閉区間</u>ならば, f は I 上で<u>一様連続</u>, すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall t_1 \in I \;\; \forall t \in I: \;\; |t - t_1| < \delta \;\Rightarrow\; |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$



(隣り合う ∀ 同士, あるいは ∃ 同士は交換可能であるが, ∀ と ∃ が隣り合うときは一般に交換は許されないことに注意.)

3 Dirichlet の定理

定理 2.9 (Dirichlet の定理)

$$f \in C^1(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad S_N f \to f \quad (\text{一様収束})$$

より精密化すると，$f \in C^k(\mathbb{T})$ $(k \in \mathbb{N})$ のとき，

$$N^{k-1/2}\|S_N f - f\|_\infty \to 0 \quad (N \to \infty)$$

まず次の補題から始める.

補題 2.10

(1) $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ は $\mathbb{T}$ 上の連続関数に一様収束

(2) $\displaystyle f \in C(\mathbb{T}),\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty \quad \Rightarrow \quad S_N f \to f \quad (\text{一様収束})$

[証] (1) は Weierstrass の M テストに他ならない.

(2) (1) により, $g(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int} \in C(\mathbb{T})$. このとき,

$$
\begin{aligned}
c_n(g) &= \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f)e^{imt} \right) e^{-int}\, đt \\
&\overset{\text{定理 } 2.3}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f) \int_{\mathbb{T}} e^{i(m-n)t}\, đt = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(f)\delta_{mn} = c_n(f).
\end{aligned}
$$

系 2.8 (1) より $f = g$ であるから,

$$
S_N f(t) = \sum_{|n|\leqslant N} c_n(f)e^{int} \xrightarrow{\text{一様収束}} g(t) = f(t). \qquad \square
$$

補題 2.11 (Bessel の不等式)

$$f \in PC(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leqslant \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 \, dt = \|f\|_2^2$$

《注》 証明は後で. 実は等号が成り立つ (Parseval の等式).

[証] (定理 2.9)

補題 2.10, 2,11 を用いて証明する.

まず, $f \in C^1(\mathbb{T})$ ならば, 部分積分により,

$$\begin{aligned} inc_n(f) &= in \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} \, dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Big[f(t) e^{-int} \Big]_0^{2\pi} + \int_{\mathbb{T}} f'(t) e^{-int} \, dt = c_n(f'). \end{aligned}$$

よって, Schwarz の不等式, Bessel の不等式を用いて,

$$\begin{aligned}\sum_{|n|\leqslant N}|c_n(f)| &= |c_0(f)| + \sum_{1\leqslant|n|\leqslant N}\frac{|c_n(f')|}{|n|}\\ &\leqslant |c_0(f)| + \Bigl(\sum_{1\leqslant|n|\leqslant N}\frac{1}{n^2}\Bigr)^{1/2}\Bigl(\sum_{1\leqslant|n|\leqslant N}|c_n(f')|^2\Bigr)^{1/2}\\ &\leqslant \|f\|_\infty + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\|f'\|_2 < \infty \qquad \Bigl(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\Bigr)\end{aligned}$$

となり, $S_N f$ が f に一様収束することがわかった.

次に, $N < N_1$ に対して,

$$
\begin{aligned}
|(S_N f)(t) - (S_{N_1} f)(t)| &= \Big| \sum_{N<|n|\leqslant N_1} c_n(f) e^{int} \Big| \\
&\leqslant \sum_{N<|n|\leqslant N_1} |c_n(f)| \leqslant \sum_{N<|n|\leqslant N_1} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \\
&\leqslant \Big(\sum_{N<|n|\leqslant N_1} \frac{1}{n^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{N<|n|\leqslant N_1} |c_n(f')|^2 \Big)^{1/2} \\
&\leqslant \sqrt{\frac{2}{N}} \Big(\sum_{|n|>N} |c_n(f')|^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

ここで $N_1 \to \infty$ として $\|S_N f - f\|_\infty \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{N}} \Big(\sum_{|n|>N} |c_n(f')|^2 \Big)^{1/2}.$

更に，$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n(f')|^2 = \|f'\|_2^2 < \infty$ であるから，

$$\sqrt{N}\,\|S_N f - f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\left(\sum_{|n|>N}|c_n(f')|^2\right)^{1/2} \to 0 \ \ (N \to \infty).$$

$f \in C^k(\mathbb{T})$ の場合の主張も同様に示される． $\square$

【問 2.3】　定理 2.9 は $f \in C^1(\mathbb{T})$ を $f \in C(\mathbb{T}) \cap PC^1(\mathbb{T})$ に置き換えても成立することを示せ．(上の証明がすべて正当化されることをチェックする.)