

1.1 Fourier 級数とは

- 1 よく用いられる関数の級数展開
- 2 Fourier 級数 (周期 2π)
- 3 Fourier 級数の基本問題
- 4 Fourier 級数略史

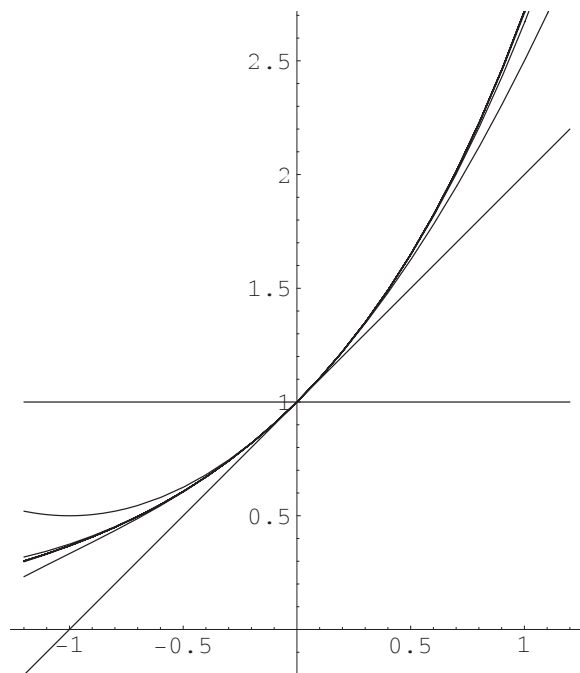
1 よく用いられる関数の級数展開

① “解析関数” に対する Taylor 級数展開 … 多項式による展開

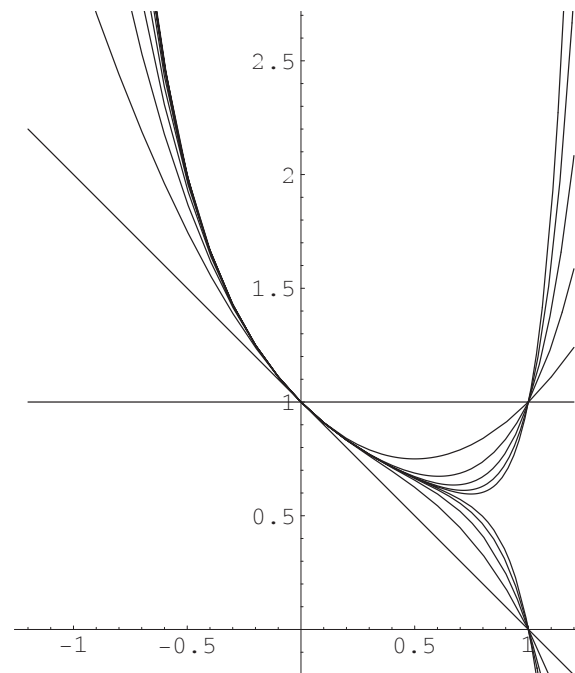
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x-a| < \text{“収束半径”})$$

例えば,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < \infty), \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$



$$y = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \quad (0 \leq N \leq 10)$$



$$y = \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{x^n}{n!} \quad (0 \leq N \leq 10)$$

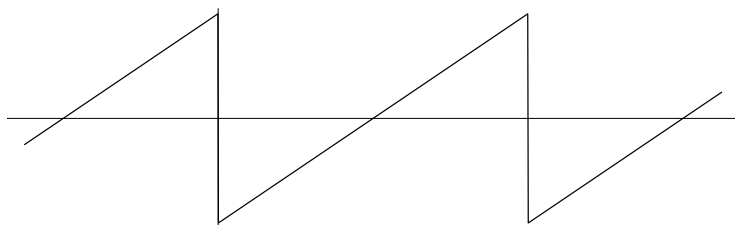
② “周期関数” に対する Fourier 級数展開 … 三角関数による展開

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right) \quad (\text{周期 } T > 0)$$

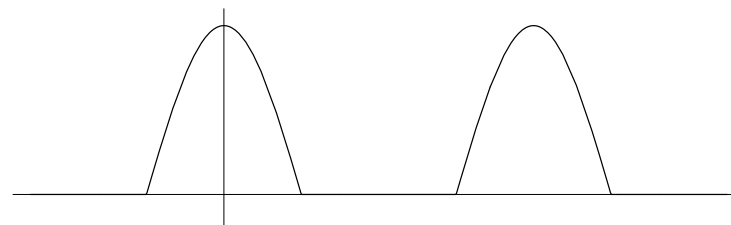
ここで,

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx, \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

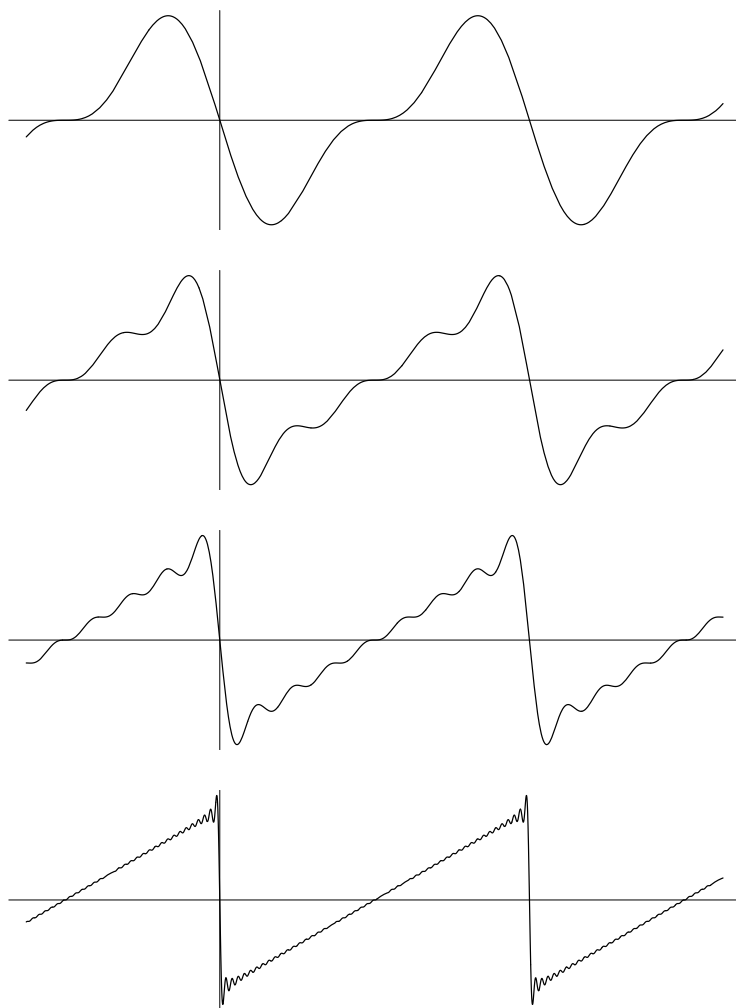
例えば,



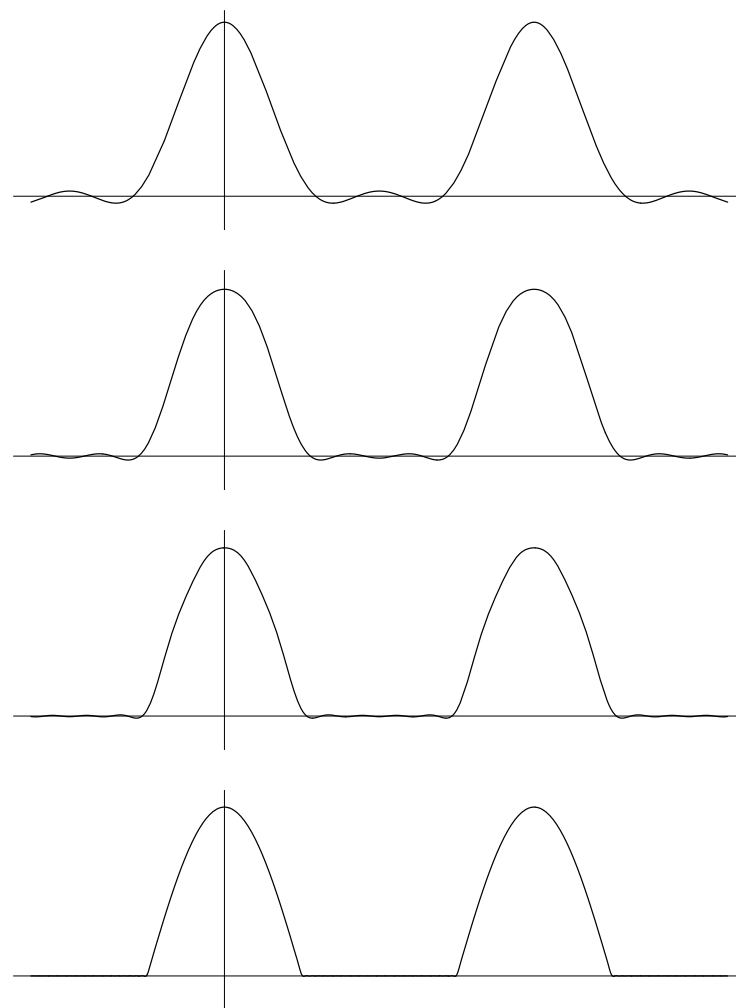
鋸歯状波



半波整流波



鋸齒狀波



半波整流波

2 Fourier 級数 (周期 2π)

②の簡略化を行う.

変数変換 $t = \frac{2\pi x}{T}$ を考え, $g(t) = f(x)$ とおけば,

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (\text{周期 } 2\pi)$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos nt \, dt, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin nt \, dt \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

次に, $n \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} a_n \cos nt + b_n \sin nt &= a_n \cdot \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \cdot \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \\ &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{int} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-int} \end{aligned}$$

であるから,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

とにおいて, “複素 Fourier 級数” を得る:

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ &= \int_{\mathbb{T}} g(t) e^{-int} d\vec{t} \quad \left(d\vec{t} = \frac{dt}{2\pi} \right) \end{aligned}$$

以下, 主にこの形の Fourier 級数を考える.

定義 ($\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上の関数) 周期 2π (or 区間 $[0, 2\pi)$ 上) の関数

$$(1) \quad f \in C(\mathbb{T}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f \text{ は周期 } 2\pi \text{ の連続関数}$$

$$f \in C^k(\mathbb{T}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f \text{ は周期 } 2\pi \text{ の } C^k \text{ 級関数 (} \underline{C^0 \text{ 級} = \text{連続}} \text{)}$$

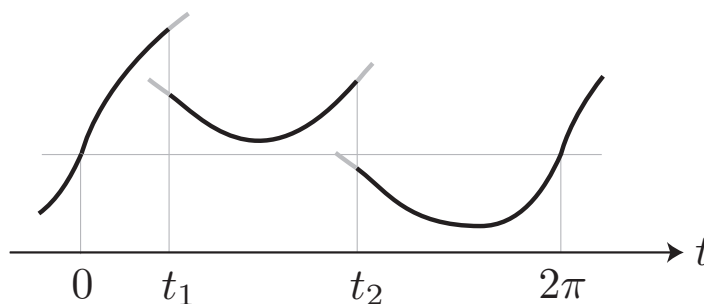
$$(2) \quad f \in PC^k(\mathbb{T}) \quad \text{区分的に } C^k \text{ 級} \quad (PC^0(\mathbb{T}) = PC(\mathbb{T}))$$

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{T} \text{ (有限個の点):}$$

f は $t_1, t_2, \dots, t_m$ を除いて C^k 級,

かつ $f^{(j)}(t_i \pm 0)$ ($0 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m$) が存在

(f の $t_1, t_2, \dots, t_m$ における値は制限しない)



(3) $f \in L^p(\mathbb{T})$ ($1 \leq p \leq \infty$)

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f は “(Lebesgue) 可測関数” で, $\|f\|_p < \infty$

但し,

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mathbb{T})} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{T}} |f(t)| & (p = \infty) \end{cases}$$

$\|f\|_p < \infty$ なる可測関数 f を

$1 \leq p < \infty$ なら p 乗可積分 ($p = 1$ なら単に可積分),

$p = \infty$ なら (本質的に) 有界

- 《注》
- (3) の説明には Lebesgue 積分が必要となるが, とりあえずは $f \in PC(\mathbb{T})$ の Riemann 積分を考えよ. ($\operatorname{ess\,sup}$ は $\sup$ のようなもの)
 - 区間 I 上では通常 $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$ と定める.

定義 $f \in L^1(\mathbb{T})$ に対して,

- Fourier 級数 $f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$

Fourier 係数 $c_n = c_n(f) := \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$

- 実 Fourier 級数 $f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

実 Fourier 係数
$$\begin{cases} a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \cos nt dt, \\ b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) \sin nt dt \end{cases} \quad (n \geq 0)$$

(記号 $\sim$ は右辺が “形式的な” 展開であることを意味する.)

《注》 (Fourier 係数の形)

周期 2π の関数 $f(t)$ が “三角多項式” により

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

と展開されたとすれば, (少なくとも形式的に)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-imt} dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = 2\pi c_m \\ \therefore c_m &= \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-imt} dt \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

【問 1.1】 $f(t)$ が実 Fourier 級数に展開されるとき, 上と同様な形式的議論により, 実 Fourier 係数 a_n, b_n の積分による表現式を導け.

《注》 $f \in L^1(\mathbb{T})$ の (実)Fourier 係数を計算する際に次の情報は有効.

$$(1) \quad c_{\pm n} = \frac{1}{2}(a_n \mp ib_n) \quad (n \geq 0) \quad (\text{複号同順})$$

特に, f が実数値関数ならば,

$$c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad a_n = 2 \operatorname{Re} c_n, \quad -b_n = 2 \operatorname{Im} c_n \quad (n \geq 0).$$

$$(2) \quad \bullet \quad f \text{ が奇関数 (i.e., } f(-t) = -f(t))$$

$$\Rightarrow \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin nt \, dt.$$

$$\bullet \quad f \text{ が偶関数 (i.e., } f(-t) = f(t))$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = 0.$$

【問 1.2】* 上の (2) の性質を確認せよ.

《例》 $f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \pi) \\ 0 & (\pi \leq t < 2\pi) \end{cases}$ (周期 2π) の Fourier 級数

Fourier 係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi e^{-int} dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n = 0) \\ \frac{1}{2\pi} \frac{(-1)^n - 1}{-in} = \begin{cases} 0 & (n \neq 0 : \text{even}) \\ \frac{-i}{\pi n} & (n : \text{odd}) \end{cases} \end{cases}$$

よって, f の Fourier 級数は,

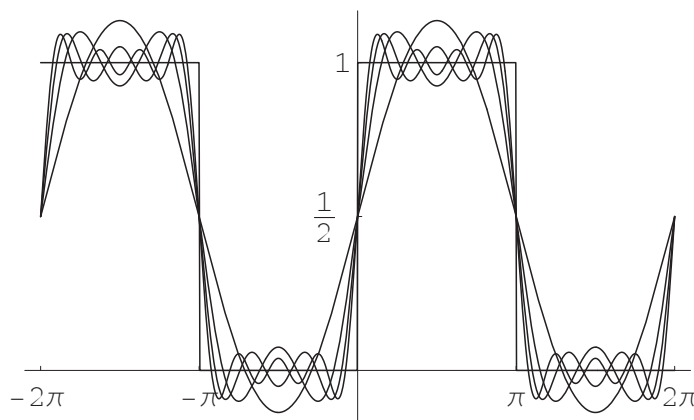
$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n: \text{odd}} \frac{-i}{\pi n} e^{int} = \frac{1}{2} + \frac{-i}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i(2m+1)t}}{2m+1} - \frac{e^{-i(2m+1)t}}{2m+1} \right).$$

また, 実 Fourier 級数で表すと

$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1: \text{odd}} \frac{2}{\pi n} \sin nt = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)t}{2m+1}.$$

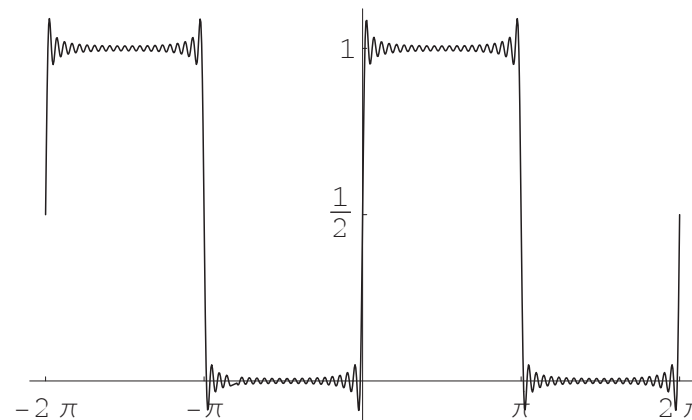
先に実 Fourier 係数 a_n, b_n を求め, それを用いて Fourier 係数 c_n を求めてもよい.

(上の《注》参照)



$$y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^M \frac{\sin(2m+1)t}{2m+1}$$

$(M = 0, 1, 2, 3,)$



$$y = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{20} \frac{\sin(2m+1)t}{2m+1}$$

【問 1.3】 次の関数 (周期 2π) の Fourier 級数および実 Fourier 級数を求めよ.
ただし, 関数は区間 $(-\pi, \pi]$ で与えられているとする.

$$(1)^* \quad f(t) = t^k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

(余力があったら一般の $k \in \mathbb{N}$ に対して)

$$(2) \quad f(t) = \cos \mu t, \quad g(t) = \sin \mu t \quad (\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$$

$$(3) \quad f(t) = \frac{1}{1 - 2a \cos t + a^2} \quad (0 < |a| < 1)$$

ヒント : (1), (2) は先に実 Fourier 係数 a_n, b_n を求めるとよい.

(3) は Fourier 係数 c_n を $|z| = 1$ 上の複素積分で表して計算せよ.

3 Fourier 級数の基本問題

Fourier 級数の部分和

$$(S_N f)(t) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (\star)$$

に対して,

$$(S_N f)(t) \xrightarrow{?} f(t) \quad (N \rightarrow \infty)$$

- 無限和は収束するか？
- もとの関数を再現するか？

【問 1.4】* $(\star)$ の右側の等号の成立を説明せよ.

4 Fourier 級数略史

- 18 世紀の数学者 Bernoulli, Euler, Lagrange 達は

$$(S_N f)(t) \rightarrow f(t) \quad (N \rightarrow \infty) \quad (\text{Fourier 級数の収束})$$

がいくつかの簡単な f で成り立つことを経験的に知っていた.

- Fourier による Fourier 級数の方法の考案 (19 世紀初め)

自ら導いた熱伝導方程式を解く手段としてこの方法を考案. この収束が常に正しいと主張したが証明は厳密でなかった. のちに『熱の解析的理論』を出版 (1822)

- Dirichlet による収束問題の部分的解決

$$f \in PC^1(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad (S_N f)(t) \rightarrow \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$$

後に, f が $\mathbb{T}$ 上の “有界変動関数” でも OK. (Jordan)

- Du Bois-Reymond による反例 (1876)

$$\exists f \in C(\mathbb{T}) : \limsup_{N \rightarrow \infty} (S_N f)(0) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq N} (S_n f)(0) \right) = \infty$$

- 各点収束に関する決定的結果

(1) Kolmogorov (1928)

$$\exists f \in L^1(\mathbb{T}) : \limsup_{N \rightarrow \infty} |(S_N f)(t)| = \infty \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

(2) Carleson, Hunt (1966, 1968)

$$\begin{aligned} f \in L^p(\mathbb{T}) \quad (\supset C(\mathbb{T})) \quad (p > 1) \\ \Rightarrow \quad (S_N f)(t) \rightarrow f(t) \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

ここで, a.e. = almost everywhere (“ほとんど至るところ”) とは, 収束しない t の集合が “(Lebesgue) 測度 0” であることを意味する.

《参考図書》

- 小暮陽三 著: なっとくするフーリエ変換, 講談社, 1999.
- 船越満明 著: キーポイント・フーリエ解析, 岩波書店, 1997.
- 吉川 敦 著: フーリエ解析入門, 森北出版, 2000.
- 谷島賢二 著: 物理数学入門, 東京大学出版会, 1994.
- 新井仁之 著: フーリエ解析と関数解析学, 培風館, 2001.
- T. W. ケルナー著, 高橋陽一郎 訳: フーリエ解析大全 (上下 2 巻) 朝倉書店, 1996.
- E. M. スタイン, R. シャカルチ著, 新井, 杉本, 高木, 千原 訳: フーリエ解析入門, 日本評論社, 2007.