《注意》

- $\boxed{\text{重要}}$ この解答例は個人の利用のみに限って下さい.
- 不適切な箇所に気付いたらお知らせ下さい (成績に反映させます). その都度更新していきます.
- 2017/10/06 問題 4.1 4. (4) の解答を修正しました (thanks to 蛭子くん@wsd).
- 2017/10/17 問題 4.4 3. (2) の解答を修正しました (thanks to 蛭子くん@wsd).
- 2018/01/17 問題 5.1 3. (3) の解答を修正しました (thanks to 佐々木くん@wsd).
- 2018/10/11 問題 4.2 1. の解答の表現を部分的に変更しました.
- 2018/11/03 問題 4.1 1. 3. の解答の表現を部分的に変更しました.
- 2018/12/17 問題 4.2 3. の解答の最初の部分と (3) の軽微なミスを修正しました (thanks to 伊藤さん@wsd).
- 2018/12/25 問題 4.2 11. の解答の表現を部分的に修正しました.
- 2020/01/11 問題 4.2 3. (4) のタイポを修正しました (thanks to 秋山くん@wsd).
- 2020/01/11 問題 4.2 6 の解答を修正しました (thanks to 秋山くん@wsd).

【問題 4.1】

1. $(x,y) \to (0,0)$ とは, ($(0,0)$ とは異なる) (x,y) と $(0,0)$ の距離を 0 に近づけること, すなわち $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$ を意味する. 従って, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \alpha$ を示すには, $\rho(0)=0$ なる $r \geqslant 0$ 上の連続関数 $\rho(r)$ を適当に選び,

$$|f(x,y)-\alpha| \leqslant \rho(\sqrt{x^2+y^2}\,) \quad (\forall (x,y) \neq (0,0),\ (x,y) \in ((0,0)\ の近傍) \cap (f\ の定義域))$$

の形の不等式が成り立つことを示せばよい. その際に,

$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}, \quad |x|+|y| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

といった不等式が役にたつ.

(1) $(x,y)\to(0,0)$ のとき, $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|y| \leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

(2) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{-2y^2}{y^2} = -2$ より, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$ は存在しない (近づける方向により極限が異なるから).

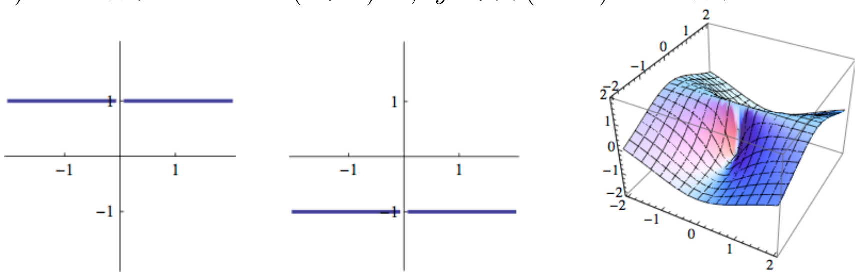
(3) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{2y^2}{y^2} = 2$ より, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{2x^2+y^2}$ は存在しない (近づける方向により極限が異なるから).

(4) $(x,y)\to(0,0)$ のとき, $\left|\dfrac{x^3+x^2y}{2x^2+y^2}\right| = \dfrac{x^2}{2x^2+y^2}|x+y| \leqslant \dfrac{|x|+|y|}{2} \leqslant \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{2}} \to 0$.
よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+x^2y}{2x^2+y^2} = 0$.

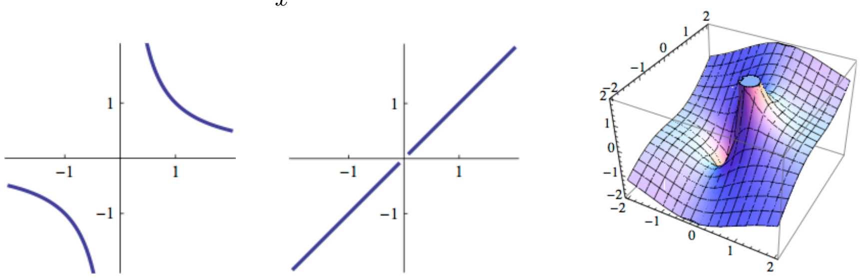
(5) $(x,y)\to(0,0)$ のとき, $\left|\dfrac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+y^2}}\sqrt{|y|} \leqslant \sqrt{|y|} \leqslant \sqrt[4]{x^2+y^2} \to 0$.
よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

(6) 放物線 $x = ay^2$ (a は定数) に沿って $(0,0)$ に近づけた極限は $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=ay^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{ay^2\cdot y^2}{a^2y^4+y^4} = \frac{a}{a^2+1}$. この値が a に依存するので, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しない.

2. (1) xz 平面 $(y=0)$ による切り口は $z=1$ $(x\neq 0)$ で, yz 平面 $(x=0)$ による切り口は $z=-1$ $(y\neq 0)$.



(2) xz 平面 $(y=0)$ による切り口は $z=\dfrac{1}{x}$ で, yz 平面 $(x=0)$ による切り口は $z=y$ $(y\neq 0)$.



3. (1) $|xy| \leqslant \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ に注意して, $(x,y) \to (0,0)$ のとき $|f(x,y)| = \dfrac{|x+y|(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{3}{2}(|x|+|y|) \leqslant \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$. よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である.

(2) $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}$ より, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在しない. よって, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続とはなり得ない.

(3) $(x,y) \to (0,0)$ のとき $|f(x,y)-1| = \left|\dfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x^2 + \dfrac{y^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \leqslant x^2+|y| \leqslant (x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2} \to 0$. よって, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 = f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続である.

【注】$(x,y) \to (0,0)$ のとき, (1) において $|x|+|y| \to 0$, (3) において $x^2+|y| \to 0$ としても全く問題ないが, ここでは上の **1** の最初に述べた原則に従って計算を進めた.

4. (1) $z = x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$ より, $z_x = 2xy^5 - 6x^2y^2$, $z_y = 5x^2y^4 - 4x^3y + 1$.

(2) $z = x^3 + y^2 + 3$ より, $z_x = 3x^2$, $z_y = 2y$.

(3) $z = \sin(x^2y)$ より, $z_x = 2xy\cos(x^2y)$, $z_y = x^2\cos(x^2y)$.

(4) $z = \cos(x^2+xy)$ より, $z_x = -(2x+y)\sin(x^2+xy)$, $z_y = -x\sin(x^2+xy)$.

(5) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ より, $z_x = \dfrac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = -\dfrac{2y}{(x-y)^2}$, $z_y = \dfrac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2} = \dfrac{2x}{(x-y)^2}$.

(6) $z = \log(x^2+xy+y^2)$ より, $z_x = \dfrac{2x+y}{x^2+xy+y^2}$, $z_y = \dfrac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$.

(7) $z = \log\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ より, $z_x = \dfrac{2x}{2(x^2+y^2)} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $z_y = \dfrac{2y}{2(x^2+y^2)} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

(8) $z = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ より, $z_x = \dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z_y = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

(9) $w = x^2y^3z^2$ より, $w_x = 2xy^3z^2$, $w_y = 3x^2y^2z^2$, $w_x = 2x^2y^3z$.

(10) $w = \mathrm{Sin}^{-1}(x+yz)$ より, $w_x = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}$, $w_y = \dfrac{z}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}$, $w_z = \dfrac{y}{\sqrt{1-(x+yz)^2}}$.

5. (1) $z = x^3y^3$ より, $z_x = 3x^2y^3$, $z_y = 3x^3y^2$. よって, $xz_x + yz_y = x\cdot 3x^2y^3 + y\cdot 3x^3y^2 = 6x^3y^3 = 6z$.

(2) $w = (x-y)(y-z)(z-x)$ より, 積の微分公式を用いて, $w_x + w_y + w_z = \{(y-z)(z-x)-(x-y)(y-z)\} + \{-(y-z)(z-x)+(x-y)(z-x)\} + \{-(x-y)(z-x)+(x-y)(y-z)\} = 0$.

【問題 4.2】

1. $L_\theta = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r > 0\}$ (x 軸の正の向きと角 θ をなす半直線) とおく. $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in L_\theta$ のとき, $f(x, y) = \dfrac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \sin 2\theta$. よって, $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in L_\theta}} f(x, y) = \sin 2\theta$. この値は θ に依存するので $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で不連続である. 次に,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^2}-0}{x} = 0, \qquad \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y} = 0,$$

より, $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ が存在する (値はともに 0) ので, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で偏微分可能. しかし, $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で不連続であったから全微分可能ではない. 実際, $f(x, y)$ が $(0, 0)$ で全微分可能ならば連続となるはずだが, 上で見たように $f(x, y)$ は $(0, 0)$ で不連続.

2. 点 $\mathrm{P}(a, b, f(a, b))$ における接平面の方程式は $z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$, すなわち $f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0$ と表されるので, 接平面は $(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ を法線ベクトルとする. 従って, 点 P における法線上の任意の点を (x, y, z) とすれば, $(x - a, y - b, z - f(a, b)) \mathbin{/\!/} (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ (平行) であるから, $(x - a, y - b, z - f(a, b)) = k(f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$ と書ける. これより k を消去して, 点 P における法線の方程式 $\dfrac{x-a}{f_x(a,b)} = \dfrac{x-b}{f_y(a,b)} = \dfrac{z-f(a,b)}{-1}$ を得る.

3. 与えられた曲面を $z = f(x, y)$ と表す. 曲面上の点 $(a, b, f(a, b))$ における接平面, 法線の方程式はそれぞれ

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b), \qquad \frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

で与えられる.

(1) $f(x, y) = 3x^2y + xy$ の偏導関数は $f_x(x, y) = 6xy + y$, $f_y(x, y) = 3x^2 + x$. これより, $f(1, -1) = -4$, $f_x(1, -1) = -7$, $f_y(1, -1) = 4$. よって, 点 $(1, -1, -4)$ における接平面の方程式は $z + 4 = -7(x - 1) + 4(y + 1)$, すなわち $7x - 4y + z - 7 = 0$. また法線の方程式は $\dfrac{x-1}{-7} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z+4}{-1}$, すなわち $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y+1}{-4} = z + 4$.

(2) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{3^2}$ の偏導関数は $f_x(x, y) = \dfrac{1}{2}x$, $f_y(x, y) = \dfrac{2}{9}y$. これより, $f(2, -3) = 2$, $f_x(2, -3) = 1$, $f_y(2, -3) = -\dfrac{2}{3}$. よって, 点 $(2, -3, 2)$ における接平面の方程式は $z - 2 = (x - 2) - \dfrac{2}{3}(y + 3)$, すなわち $3x - 2y - 3z - 6 = 0$. また法線の方程式は $x - 2 = \dfrac{y+3}{-2/3} = \dfrac{z-2}{-1}$, すなわち $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{3}$.

(3) $f(x, y) = \dfrac{x}{x+y} = 1 - \dfrac{y}{x+y}$ の偏導関数は $f_x(x, y) = \dfrac{y}{(x+y)^2}$, $f_y(x, y) = -\dfrac{x}{(x+y)^2}$. これより, $f(-2, 1) = 2$, $f_x(-2, 1) = 1$, $f_y(-2, 1) = 2$. よって, 点 $(-2, 1, 2)$ における接平面の方程式は $z - 2 = (x + 2) + 2(y - 1)$, すなわち $x + 2y - z + 2 = 0$. また法線の方程式は $x + 2 = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

(4) $f(x, y) = \mathrm{Tan}^{-1}\,\dfrac{y}{x}$ の偏導関数は $f_x(x, y) = \dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x, y) = \dfrac{1/x}{1+(y/x)^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$. これより, $f(1, -1) = -\dfrac{\pi}{4}$, $f_x(1, -1) = f_y(-2, 1) = \dfrac{1}{2}$. よって, 点 $\left(1, -1, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ における接平面の方程式は $z + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}(x - 1) + \dfrac{1}{2}(y + 1)$, すなわち $x + y - 2z - \dfrac{\pi}{2} = 0$. また法線の方程式は $\dfrac{x-1}{1/2} = \dfrac{y+1}{1/2} = \dfrac{z+\frac{\pi}{4}}{-1}$, すなわち $x - 1 = y + 1 = \dfrac{z+\frac{\pi}{4}}{-2}$.

4. x が x, y の関数で, x, y のそれぞれが t の関数のとき, 合成関数の微分公式 $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ が成り立つ. これを用いて解答を行う.

(1) $x=t^2,\ y=e^t$ より, $\dfrac{dx}{dt}=2t,\ \dfrac{dy}{dt}=e^t$. よって, $z=xy^2-x^2y$ に合成関数の微分公式を適用して,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=(y^2-2xy)\cdot 2t+(2xy-x^2)\cdot e^t=e^t(e^t-2t^2)\cdot 2t+t^2(2e^t-t^2)\cdot e^t\\&=2te^{2t}-4t^3e^t+2t^2e^{2t}-t^4e^t=2t(t+1)e^{2t}-t^3(t+4)e^t.\end{aligned}$$

(2) $x=e^t+e^{-t},\ y=e^{2t}$ より, $\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\ \dfrac{dy}{dt}=2e^{2t}$. よって, $z=\mathrm{Tan}^{-1}(xy)$ に合成関数の微分公式を適用して,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{y}{1+(xy)^2}\cdot(e^t-e^{-t})+\frac{x}{1+(xy)^2}\cdot 2e^{2t}=\frac{(e^t-e^{-t})e^{2t}+2e^{2t}(e^t+e^{-t})}{1+\{(e^t+e^{-t})e^{2t}\}^2}=\frac{(3e^{2t}+1)e^t}{1+(e^{2t}+1)^2e^{2t}}.$$

(3) $x=\cos t,\ y=t^2$ より, $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=2t$. よって, $z=e^{x^2y}$ に合成関数の微分公式を適用して,

$$\frac{dz}{dt}=2xye^{x^2y}\cdot(-\sin t)+x^2e^{x^2y}\cdot 2t=2(xt-y\sin t)xe^{x^2y}=2t(\cos t-t\sin t)(\cos t)e^{t^2\cos^2 t}.$$

(4) $x=\cos t,\ y=\sin t$ より, $\dfrac{dx}{dt}=-\sin t,\ \dfrac{dy}{dt}=\cos t$. よって, $z=f(x,y)$ に合成関数の微分公式を適用して, $\dfrac{dz}{dt}=f_x(x,y)\cdot(-\sin t)+f_y(x,y)\cdot\cos t=-f_x(\cos t,\sin t)\sin t+f_y(\cos t,\sin t)\cos t$.

5. z が x,y の関数で, x,y のそれぞれが u,v の関数のとき, 合成関数の微分公式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}$$

が成り立つ. これを用いて解答を行う.

(1) $z=xy^2+x^2y$ および $x=u+v,\ y=u-v$ より,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(y^2+2xy,\ 2xy+x^2\right)\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}=\left(x^2+4xy+y^2,\ y^2-x^2\right)=\left(2(3u^2-v^2),\ -4uv\right).$$

よって, $z_u=2(3u^2-v^2),\ z_v=-4uv$.

(2) $z=\sin(x-y)$ および $x=u^2+v^2,\ y=2uv$ より,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(\cos(x-y),\ -\cos(x-y)\right)\begin{bmatrix}2u&2v\\2v&2u\end{bmatrix}=\left(2(u-v)\cos{(u-v)^2},\ -2(u-v)\cos{(u-v)^2}\right).$$

よって, $z_u=2(u-v)\cos{(u-v)^2},\ z_v=-2(u-v)\cos{(u-v)^2}$.

(3) $z=f(x,y)$ および $x=2u-3v,\ y=u-5v$ より,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(f_x(x,y),\ f_y(x,y)\right)\begin{bmatrix}2&-3\\1&-5\end{bmatrix}=\left(2f_x(x,y)+f_y(x,y),\ -3f_x(x,y)-5f_y(x,y)\right).$$

よって, $z_u=2f_x(2u-3v,u-5v)+f_y(2u-3v,u-5v),\ z_v=-3f_x(2u-3v,u-5v)-5f_y(2u-3v,u-5v)$.

(4) $z=f(x,y)$ および $x=\cos(u+v),\ y=\sin(u-v)$ より,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(f_x(x,y),\ f_y(x,y)\right)\begin{bmatrix}-\sin(u+v)&-\sin(u+v)\\\cos(u-v)&-\cos(u-v)\end{bmatrix}.$$

$$\therefore\begin{cases}z_u=-f_x(\cos(u+v),\sin(u-v))\sin(u+v)+f_y(\cos(u+v),\sin(u-v))\cos(u-v),\\z_v=-f_x(\cos(u+v),\sin(u-v))\sin(u+v)-f_y(\cos(u+v),\sin(u-v))\cos(u-v).\end{cases}$$

(5) $z=f(x+3y)$ および $x=u-2v,\ y=3u-4v$ より,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}\right)=\left(f'(x+3y),\ 3f'(x+3y)\right)\begin{bmatrix}1&-2\\3&-4\end{bmatrix}=\left(10f'(10u-14v),\ -14f'(10u-14v)\right).$$

よって, $z_u=10f'(10u-14v),\ z_v=-14f'(10u-14v)$.

6. $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha,\ y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ であるから, $z=f(x,y)$ に対して合成関数の微分により,

$$\left(z_u,\ z_v\right)=\left(z_x,\ z_y\right)\begin{bmatrix}x_u&x_v\\y_u&y_v\end{bmatrix}=\left(z_x,\ z_y\right)\begin{bmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}=\left(z_x\cos\alpha+z_y\sin\alpha,\ -z_x\sin\alpha+z_y\cos\alpha\right).$$

よって, ${z_u}^2+{z_v}^2=(z_x\cos\alpha+z_y\sin\alpha)^2+(-z_x\sin\alpha+z_y\cos\alpha)^2={z_x}^2+{z_y}^2$.

7. (1) $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}(u+v) \\ y=\frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$ に注意して, $z=f(x,y)$ に対して合成関数の微分公式を適用すれば,

$$\big(z_u,\, z_v\big)=\big(z_x,\, z_y\big)\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}=\big(z_x,\, z_y\big)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\Big(\frac{z_x+z_y}{2},\, \frac{z_x-z_y}{2}\Big).$$

すなわち, $z_u=\dfrac{1}{2}(f_x+f_y)$, $z_v=\dfrac{1}{2}(f_x-f_y)$. あるいはもっと丁寧に表して,

$$z_u=\frac{1}{2}\Big\{f_x\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)+f_y\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\Big\}, \quad z_v=\frac{1}{2}\Big\{f_x\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)-f_y\Big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\Big)\Big\}.$$

(2) $f(x,y)$ が 1 変数関数 $g(u)$ を用いて $f(x,y)=g(x+y)$ と表されるならば, $f_x=g'(x+y)=f_y$ が成り立つ. 逆に, $f_x=f_y$ ならば, $\underline{f(x,y)=h(u,v)\ (u=x+y,\, v=x-y)}$ と表したとき, (1) より $h_v=\dfrac{1}{2}(f_x-f_y)=0$ となるので, $h(u,v)$ は u のみの関数である (教科書の定理 4.1.2). これを $g(u)$ と書けば, $f(x,y)=g(x+y)$ と表される. なお, 下線部の $h(u,v)$ はより具体的に $h(u,v)=f\Big(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2}\Big)$ で与えられる.

8. (1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ より, $z=f(x,y)$ に対して,

$$\big(z_r,\, z_\theta\big)=\big(z_x,\, z_y\big)\begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix}=\big(z_x,\, z_y\big)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}=\big(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta,\, r(-z_x\sin\theta+z_y\cos\theta)\big).$$

すなわち, $z_r=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta$, $z_\theta=-f_x r\sin\theta+f_y r\cos\theta=-yf_x+xf_y$. あるいはもっと丁寧に

$$\begin{cases} z_r=f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta+f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta, \\ z_\theta=-f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\sin\theta+f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\cos\theta. \end{cases}$$

(2) $f(x,y)$ が 1 変数関数 $g(r)$ を用いて $f(x,y)=g(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2}\,)$ と表されるならば,

$$f_x=g'(r)r_x=g'(r)\frac{x}{r}, \quad f_y=g'(r)r_y=g'(r)\frac{y}{r} \quad \text{より}, \quad yf_x=xf_y \ \Big(=g'(r)\frac{xy}{r}\Big).$$

ここで, $r_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{r}$, $r_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{r}$ を用いた. 逆に, $yf_x=xf_y$ ならば, $f(x,y)=h(r,\theta)$ $(x=r\cos\theta,\, y=r\sin\theta)$ と表したとき, (1) より $h_\theta=-yf_x+xf_y=0$ となるので, $h(r,\theta)$ は r のみの関数である (教科書の定理 4.1.2). これを $g(r)$ と書けば, $f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2}\,)$ と表される.

9. (1) $x=au+bv$, $y=cu+dv$ $(a,b,c,d$ は定数) より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$

(2) $x=r\cosh t$, $y=r\sinh t$ より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cosh t & r\sinh t \\ \sinh t & r\cosh t \end{vmatrix}=r(\cosh^2 t-\sinh^2 t)=r.$

(3) $x=u+v$, $y=uv$ より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ v & u \end{vmatrix}=u-v.$

(4) $x=uv$, $y=u^2-v^2$ より, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} v & u \\ 2u & -2v \end{vmatrix}=-2(u^2+v^2).$

10. (1) $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ ((r,θ,φ) は空間の極座標 — 教科書 p.120 参照) より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}&=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&=r^2\sin\theta\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 列の共通因数 } r\text{, 第 3 列の共通} \\ \text{因数 } r\sin\theta \text{ をそれぞれ括り出した}\end{array}\right) \\
&=r^2\sin\theta\,(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\sin^2\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\sin^2\varphi) \quad (\text{Sarrus の方法}) \\
&=r^2\sin\theta\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2\sin\theta.
\end{aligned}$$

【補足】上の計算の 2 行目の行列式中の 3 つの列ベクトル $\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$ をそれ

ぞれ $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ とすれば, $|\boldsymbol{e}_r| = |\boldsymbol{e}_\theta| = |\boldsymbol{e}_\varphi| = 1$ (大きさ 1), $\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\varphi$ ($\times$ は外積) が成り立つ (確認せよ). 従って, $\mathbb{R}^3$ において $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ は右手系で, 正規直交基底をなす. 故に 2 行目の行列式の値が 1 となるのは当然と言える. なお, ここで, 3 つのベクトルを $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ と表した理由は, これらのベクトルが点 $(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$ において r, θ, φ を増加させたときに点が変化する方向の単位ベクトルとなっているからである.

(2) $x = u - 2w$, $y = v - w + 1$, $z = u - w + 2$ より,

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

11. 関数 $z = f(x,y)$ が全微分可能ならば, 点 (x,y) において x, y をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ (微少量) だけ動かしたとき, $z = f(x,y)$ の値の変化 Δz は

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y \ \ (f(x,y) \text{ の 1 次近似})$$

と $\Delta x, \Delta y$ の 1 次式で近似される. ここでは近似を表す記号として $\approx$ を用いたが, 代わりに $\fallingdotseq$ や $\simeq$ が用いられることもある. 以下では, $\approx$ を 1 次近似の意味で用いる.

(1) $S = xy$ より, $S_x = y$, $S_y = x$. よって, $\Delta S \approx S_x \Delta x + S_y \Delta y = y\Delta x + x\Delta y$.

(2) $V = xyz$ より, $V_x = yz$, $V_y = xz$, $V_z = xy$. よって,

$$\Delta V \approx V_x \Delta x + V_y \Delta y + V_z \Delta z = yz\Delta x + xz\Delta y + xy\Delta z.$$

(3) 楕円の長軸, 短軸の長さをそれぞれ A, B $(A \geqslant B)$ とすれば, 楕円の面積は $S = \pi(A/2)(B/2) = \dfrac{\pi}{4}AB$ で与えられる. よって, 面積の変化の 1 次近似は $\Delta S \approx \dfrac{\pi}{4}(B\Delta A + A\Delta B)$ で与えられる. 特に,

$$A = 2\,\mathrm{m} = 200\,\mathrm{cm}, \quad B = 1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}, \quad \Delta A = 1\,\mathrm{cm}, \quad \Delta B = -1\,\mathrm{cm}$$

のときには, $\Delta S \approx \dfrac{\pi}{4}\{100 \cdot 1 + 200 \cdot (-1)\}\,\mathrm{cm}^2 = -25\pi\,\mathrm{cm}^2$.

12. 問題文の書き方がしっくり来ない. 以下の (2) の解答を見て問題文の言わんとすることを理解してほしい.

(1) $f(x,y) = x + 2y$ のとき, $f_x(x,y) = 1$.

(2) $g(x,u) = -x + 2u$ のとき, $g(x, x+y) = x + 2y \ (= f(x,y))$, $g_x(x, x+y) = -1$.

【注意】 $g_x(x, x+y)$ は $g_x(x,u)$ に $u = x + y$ を代入したものを表す. よって $g_x(x, x+y) = -1$ であった. $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, x+y)$ と書いても同じ意味である. しかし, $\dfrac{\partial}{\partial x}\,g(x, x+y)$ と書いた場合には, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ が $g(x, x+y) = x + 2y$ に作用することを表すので, $\dfrac{\partial}{\partial x}\,g(x, x+y) = 1$ となる.

【問題 4.3】

1. (1) $\left(2\dfrac{\partial}{\partial x}+3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=\left(4\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+9\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)=4f_{xx}(x,y)+12f_{xy}(x,y)+9f_{yy}(x,y)$.

(2) $\left(2\dfrac{\partial}{\partial x}+3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)$ は $\left(2\dfrac{\partial}{\partial x}+3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$ に $(x,y)=(0,0)$ を代入したものを表す．今, $f(x,y)=e^{2x+y}$ であるから, $f_{xx}(x,y)=4e^{2x+y}$, $f_{xy}(x,y)=2e^{2x+y}$, $f_{yy}(x,y)=e^{2x+y}$. よって,

$$\left(2\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0)=4f_{xx}(0,0)+12f_{xy}(0,0)+9f_{yy}(0,0)=4\cdot 4+12\cdot 2+9\cdot 1=49.$$

【注意】偏微分作用素が定数係数である場合は $\left(2\dfrac{\partial}{\partial x}+3\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2=4\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+9\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ というように単純に展開すればよいが, 変数係数の場合は注意を要する．例えば, $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2$ に対しては,

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)&=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\big(xf_x(x,y)+yf_y(x,y)\big)\\&=x\frac{\partial}{\partial x}\big(xf_x(x,y)+yf_y(x,y)\big)+y\frac{\partial}{\partial y}\big(xf_x(x,y)+yf_y(x,y)\big)\\&=x\big(f_x(x,y)+xf_{xx}(x,y)+yf_{xy}(x,y)\big)+y\big(xf_{xy}(x,y)+f_y(x,y)+yf_{yy}(x,y)\big)\\&=x^2f_{xx}(x,y)+2xyf_{xy}(x,y)+y^2f_{yy}(x,y)\ \boxed{+\,xf_x(x,y)+yf_y(x,y)}\end{aligned}$$

となる (枠で囲んだ部分に注意).

2. (1) $z=x^3y+xy^2$ の偏導関数は $z_x=3x^2y+y^2$, $z_y=x^3+2xy$. よって, 2 次 (= 2 階) の偏導関数は

$$z_{xx}=6xy,\quad z_{xy}=z_{yx}=3x^2+2y,\quad z_{yy}=2x.$$

(2) $z=x\sin xy$ の偏導関数は $z_x=\sin xy+xy\cos xy$, $z_y=x^2\cos xy$. よって, 2 次の偏導関数は

$$z_{xx}=2y\cos xy-xy^2\sin xy,\quad z_{xy}=z_{yx}=2x\cos xy-x^2y\sin xy,\quad z_{yy}=-x^3\sin xy.$$

(3) $z=e^{x^2y}$ の偏導関数は $z_x=2xye^{x^2y}$, $z_y=x^2e^{x^2y}$. よって, 2 次の偏導関数は

$$z_{xx}=(4x^2y^2+2y)e^{x^2y},\quad z_{xy}=z_{yx}=(2x^3y+2x)e^{x^2y},\quad z_{yy}=x^4e^{x^2y}.$$

(4) $z=\mathrm{Tan}^{-1}\,xy$ の偏導関数は $z_x=\dfrac{y}{1+x^2y^2}$, $z_y=\dfrac{x}{1+x^2y^2}$. よって, 2 次の偏導関数は

$$z_{xx}=-\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2},\quad z_{xy}=z_{yx}=\frac{(1+x^2y^2)-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2}=\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2},\quad z_{yy}=-\frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2}.$$

3. (1) $z=\log(x^2+y^2)$ より, $z_x=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $z_y=\dfrac{2y}{x^2+y^2}$. 更に, $z_{xx}=\dfrac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. 同様に, $z_{yy}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ (x,y の対称性に注意). よって, $\varDelta\log(x^2+y^2)=\dfrac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}+\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=0$.

(2) $z=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ より, $z_x=\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_y=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. 更に,

$$z_{xx}=-\frac{6x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8x^3}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},\quad z_{yy}=-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^3}=\frac{2x(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}.$$

よって, $\varDelta\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}+\dfrac{2x(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3}=0$.

(3) $z=\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ より, $z_x=\dfrac{-y/x^2}{1+(y/x)^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z_y=\dfrac{1/x}{1+(y/x)^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$. 更に, $z_{xx}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$. よって, $\varDelta\,\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=0$.

(4) $z=x^3+xy+y^3$ より, $z_x=3x^2+y$, $z_y=x+3y^2$. 更に, $z_{xx}=6x$, $z_{yy}=6y$. よって, $\varDelta(x^3+xy+y^3)=6x+6y=6(x+y)$.

4. 《方法 1》 右辺から左辺を導こう．$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ より，$z = f(x,y)$ に対して，

$$\big(z_r,\, z_\theta\big) = \big(z_x,\, z_y\big)\begin{bmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{bmatrix} = \big(z_x,\, z_y\big)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = \big(z_x\cos\theta + z_y\sin\theta,\, r(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta)\big).$$

よって $z_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta$, $z_\theta = r(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta)$ が得られ，この計算を繰り返すことにより，

$$\begin{aligned} z_{rr} &= (z_x\cos\theta + z_y\sin\theta)_r = (z_{xx}\cos\theta + z_{xy}\sin\theta)\cos\theta + (z_{xy}\cos\theta + z_{yy}\sin\theta)\sin\theta \\ &= z_{xx}\cos^2\theta + 2z_{xy}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\sin^2\theta, \\ z_{\theta\theta} &= r\,(-z_x\sin\theta + z_y\cos\theta)_\theta \\ &= r\big(-\{r(-z_{xx}\sin\theta + z_{xy}\cos\theta)\sin\theta + z_x\cos\theta\} + \{r(-z_{xy}\sin\theta + z_{yy}\cos\theta)\cos\theta - z_y\sin\theta\}\big) \\ &= r^2(z_{xx}\sin^2\theta - 2z_{xy}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\cos^2\theta) - r(z_x\cos\theta + z_y\sin\theta). \end{aligned}$$

以上を用いて，

$$\begin{aligned} z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta} &= (z_{xx}\cos^2\theta + 2z_{xy}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\sin^2\theta) + \frac{1}{r}(z_x\cos\theta + z_y\sin\theta) \\ &\quad + \{z_{xx}\sin^2\theta - 2z_{xy}\cos\theta\sin\theta + z_{yy}\cos^2\theta - \frac{1}{r}(z_x\cos\theta + z_y\sin\theta)\} \\ &= z_{xx} + z_{yy}. \end{aligned}$$

《方法 2》 左辺から右辺を導こう．本質的に $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ を極座標で表したときの形を求める問題であるから，右辺から左辺を導くより思考の流れとして自然である．$\big(z_r,\, z_\theta\big) = \big(z_x,\, z_y\big)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ であったから，逆写像定理により (逆写像定理を意識しなくてもよい)，

$$\big(z_x, z_y\big) = \big(z_r, z_\theta\big)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \big(z_r, z_\theta\big)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} = \Big(z_r\cos\theta - z_\theta\frac{\sin\theta}{r},\, z_r\sin\theta + z_\theta\frac{\cos\theta}{r}\Big).$$

よって，$z_x = z_r\cos\theta - z_\theta\dfrac{\sin\theta}{r}$, $z_y = z_r\sin\theta + z_\theta\dfrac{\cos\theta}{r}$ が得られ，この計算を繰り返すことにより，

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \Big(z_r\cos\theta - z_\theta\frac{\sin\theta}{r}\Big)_x = \Big(z_r\cos\theta - z_\theta\frac{\sin\theta}{r}\Big)_r\cos\theta - \Big(z_r\cos\theta - z_\theta\frac{\sin\theta}{r}\Big)_\theta\frac{\sin\theta}{r} \\ &= \Big(z_{rr}\cos\theta - z_{r\theta}\frac{\sin\theta}{r} + z_\theta\frac{\sin\theta}{r^2}\Big)\cos\theta - \Big(z_{r\theta}\cos\theta - z_r\sin\theta - z_{\theta\theta}\frac{\sin\theta}{r} - z_\theta\frac{\cos\theta}{r}\Big)\frac{\sin\theta}{r}, \\ &= z_{rr}\cos^2\theta - z_{r\theta}\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r} + z_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + z_r\frac{\sin^2\theta}{r} + z_\theta\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}, \\ z_{yy} &= \Big(z_r\sin\theta + z_\theta\frac{\cos\theta}{r}\Big)_y = \Big(z_r\sin\theta + z_\theta\frac{\cos\theta}{r}\Big)_r\sin\theta + \Big(z_r\sin\theta + z_\theta\frac{\cos\theta}{r}\Big)_\theta\frac{\cos\theta}{r} \\ &= \Big(z_{rr}\sin\theta + z_{r\theta}\frac{\cos\theta}{r} - z_\theta\frac{\cos\theta}{r^2}\Big)\sin\theta + \Big(z_{r\theta}\sin\theta + z_r\cos\theta + z_{\theta\theta}\frac{\cos\theta}{r} - z_\theta\frac{\sin\theta}{r}\Big)\frac{\cos\theta}{r} \\ &= z_{rr}\sin^2\theta + z_{r\theta}\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r} + z_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + z_r\frac{\cos^2\theta}{r} - z_\theta\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} z_{xx} + z_{yy} &= \Big(z_{rr}\cos^2\theta - z_{r\theta}\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r} + z_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + z_r\frac{\sin^2\theta}{r} + z_\theta\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\Big) \\ &\quad + \Big(z_{rr}\sin^2\theta + z_{r\theta}\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r} + z_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + z_r\frac{\cos^2\theta}{r} - z_\theta\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\Big) \\ &= z_{rr} + \frac{1}{r}z_r + \frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

【注意】講義では次のように説明した．上での計算は以下に書くことと本質的に変わらない．
《方法 1》では，例えば $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta = \Big(\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial y}\Big)z$ より，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial z}{\partial r}\Big) = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\Big) \\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\Big) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\Big(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\Big) \\ &= \cos\theta\Big(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big) + \sin\theta\Big(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big) \\ &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

《方法 2》では, 例えば $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\sin\theta}{r} = \Big(\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\Big)z$ より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big) = \Big(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Big(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)\\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\Big(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)\\
&= \cos\theta\Big(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{r}\Big(-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\Big)\\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}.
\end{aligned}$$

5. $n=2$ に対する Maclaurin の定理は,

$$\begin{aligned}
f(h,k) &= \sum_{j=0}^{1}\frac{1}{j!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^j f(0,0) + \frac{1}{2!}\Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f(\theta h,\theta k)\\
&= f(0,0) + \{f_x(0,0)h + f_y(0,0)k\} + \frac{1}{2}\{f_{xx}(\theta h,\theta k)h^2 + 2f_{xy}(\theta h,\theta k)hk + f_{yy}(\theta h,\theta k)k^2\}
\end{aligned}$$

となる θ $(0<\theta<1)$ が存在することを主張する.

(1) $f(x,y)=e^{x-y}$ のとき, $f_x(x,y)=f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)=e^{x-y}$, $f_y(x,y)=f_{xy}(x,y)=-e^{x-y}$ であるから, $f_x(0,0)=f_{xx}(0,0)=f_{yy}(0,0)=1$, $f_y(0,0)=f_{xy}(0,0)=-1$. よって,

$$e^{h-k} = 1 + (h-k) + \frac{1}{2}e^{\theta(h-k)}(h^2-2hk+k^2) = 1 + (h-k) + \frac{1}{2}(h-k)^2e^{\theta(h-k)}.$$

(2) $f(x,y)=\cos(x+2y)$ のとき, $f_x(x,y)=-\sin(x+2y)$, $f_y(x,y)=-2\sin(x+2y)$, $f_{xx}(x,y)=-\cos(x+2y)$, $f_{xy}(x,y)=-2\cos(x+2y)$, $f_{yy}(x,y)=-4\cos(x+2y)$ であるから, $f(0,0)=1$, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xx}(0,0)=-1$, $f_{xy}(0,0)=-2$, $f_{yy}(0,0)=-4$. よって,

$$\cos(h+2k) = 1 + \frac{1}{2}\cos(\theta(h+2k))(-h^2-4hk-4k^2) = 1 - \frac{1}{2}(h+2k)^2\cos(\theta(h+2k)).$$

【注意】以下のように 1 変数関数の Maclaurin の定理を利用してもよい.

- $e^t = 1 + t + \dfrac{1}{2}t^2e^{\theta t}$ に $t=x-y$ を代入して, $e^{x-y} = 1 + (x-y) + \dfrac{1}{2}(x-y)^2e^{\theta(x-y)}$.
- $\cos t = 1 - \dfrac{1}{2}t^2\cos(\theta t)$ に $t=x+2y$ を代入して, $\cos(x+2y) = 1 - \dfrac{1}{2}(x+2y)^2\cos(\theta(x+2y))$.

6. (1) $f(x,y)=e^{x+y}$ のとき, $f'(x,y)=(e^{x+y},e^{x+y})$ より $f_x(0,0)=(1,1)\neq(0,0)$. よって, $(0,0)$ は $f(x,y)$ の停留点でないので, $(0,0)$ で極値をとらない.

(2) $f(x,y)=x^2+y^2+y^3$ のとき, $f'(x,y)=(2x,2y+3y^2)$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2+6y\end{bmatrix}$. よって, $f'(0,0)=(0,0)$, $f''(0,0)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ であるから, 明らかに $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小.

(3) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ のとき, $f'(x,y)=(2x+y,x+2y)$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. よって, $f'(0,0)=(0,0)$, $f''(0,0)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. $(0,0)$ は $f(x,y)$ の停留点で, $\det f''(0,0)=3>0$, $f_{xx}(0,0)=2>0$ であるから, $(0,0)$ で極小.

(4) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2+2xy-y^2$ のとき,

$$f'(x,y)=(4x^3-2x+2y,4y^3+2x-2y),\quad f''(x,y)=\begin{bmatrix}12x^2-2 & 2\\ 2 & 12y^2-2\end{bmatrix}.$$

よって, $f'(1,-1)=(0,0)$, $f''(1,-1)=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 2 & 10\end{bmatrix}$. $(1,-1)$ は $f(x,y)$ の停留点で, $\det f''(1,-1)=96>0$, $f_{xx}(1,-1)=10>0$ であるから, $(0,0)$ で極小.

【注意】上では $f'=(f_x,f_y)$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{bmatrix}$ を用いて極値の判定を行った. もちろん教科書の記法を用いて議論してもよい.

7. (1) $f(x,y)=x^2+xy+2y^2-4y$ のとき, $f'(x,y)=(2x+y,x+4y-4)$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}$. $f(x,y)$ の停留点は $2x+y=x+4y-4=0$ を解くことにより $\left(-\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)$. ここで, $f''\left(-\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}$ の行列式と $(1,1)$ 成分はともに正であるから, $f(x,y)$ は点 $\left(-\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)$ で極小値 $f\left(-\frac{4}{7},\frac{8}{7}\right)=-\frac{16}{7}$ をとる.

(2) $f(x,y)=x^3+2xy-x-2y$ のとき, $f'(x,y)=(3x^2+2y-1,2(x-1))$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}6x&2\\2&0\end{bmatrix}$. $f(x,y)$ の停留点は $3x^2+2y-1=2(x-1)=0$ を解くことにより $(1,-1)$. ここで, $f''(1,-1)=\begin{bmatrix}6&2\\2&0\end{bmatrix}$ であるから, $\det f''(1,-1)=-4<0$ となり, $(1,-1)$ は $f(x,y)$ の鞍点である (よって極値は存在しない).

(3) $f(x,y)=x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$ のとき, $f'(x,y)=(3x^2+2x+2y,3y^2+2x+2y)$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}6x+2&2\\2&6y+2\end{bmatrix}$. $f(x,y)$ の停留点は $3x^2+2x+2y=3y^2+2x+2y=0$ を解くことにより $(0,0)$, $\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$. 点 $\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)$ においては, $f''\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=\begin{bmatrix}-6&2\\2&-6\end{bmatrix}$ の行列式が正, (1,1) 成分が負となるので, 極大値 $f\left(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$ をとる. 次に, 点 $(0,0)$ においては, $f''(0,0)=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$ の行列式が 0 となるので, $f''(0,0)$ で極値の判定はできない. $f(x,-x)=0$ であるから, $f(x,y)$ は $(0,0)$ で (狭義の) 極値はとらない.

(4) $f(x,y)=x^4+y^2+2x^2-4xy+1$ のとき, $f'(x,y)=(4(x^3+x-y),2(y-2x))$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}12x^2+4&-4\\-4&2\end{bmatrix}$. $f(x,y)$ の停留点は $x^3+x-y=y-2x=0$ を解くことにより $(0,0)$, $(\pm1,\pm2)$. 点 $(0,0)$ においては, $f''(0,0)=\begin{bmatrix}4&-4\\-4&2\end{bmatrix}$ の行列式が負となるので, 極値はとらない ($(0,0)$ は鞍点). 次に, 点 $(\pm1,\pm2)$ においては, $f''(\pm1,\pm2)=\begin{bmatrix}16&-4\\-4&2\end{bmatrix}$ の行列式と $(1,1)$ 成分がともに正となるので, 極小値 $f(\pm1,\pm2)=0$ をとる.

(5) $f(x,y)=x^2-xy+y^2+2x-y+7$ のとき, $f'(x,y)=(2x-y+2,-x+2y-1)$, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$. $f(x,y)$ の停留点は $2x-y+2=-x+2y-1=0$ を解くことにより $(-1,0)$. 点 $(-1,0)$ においては, $f''(-1,0)=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&2\end{bmatrix}$ の行列式と $(1,1)$ 成分がともに正となるので, 極小値 $f(-1,0)=6$ をとる.

【問題 4.4】

1. 仮定から, $f(x,y)=0$ 上の各点で f_x, f_y の少なくとも一方は 0 でない. $f(x,y)=0$ 上の点 (a,b) において,

(i) $f_y(a,b)\neq 0$ のとき, 陰関数定理により, 点 (a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ は陰関数 $y=\varphi(x)$ をもち, $\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ が成り立つ. このとき, 点 (a,b) における $f(x,y)=0$ の接線は $y=\varphi(x)$ の接線に他ならないので, その方程式は $y-b=\varphi'(a)(x-a)$. これに $\varphi'(a)=-\dfrac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$ を代入して整理すれば, 接線の方程式 $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$ を得る.

(ii) $f_x(a,b)\neq 0$ のとき, 陰関数定理により, 点 (a,b) の近傍で $f(x,y)=0$ は陰関数 $x=\psi(y)$ をもち, $\psi'(y)=-\dfrac{f_y(\psi(y),y)}{f_x(\psi(y),y)}$ が成り立つ. このとき, 点 (a,b) における $f(x,y)=0$ の接線は $x=\psi(y)$ の接線に他ならないので, その方程式は $x-a=\psi'(b)(y-b)$. これに $\psi'(b)=-\dfrac{f_y(a,b)}{f_x(a,b)}$ を代入して整理すれば, 接線の方程式 $f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$ を得る.

2. (1) $f(x,y)=x^3+3xy+y^5-x+1$ とおく. $f_y(x,y)=3x+5y^4$ であり, $f(2,-1)=0$, $f_y(2,-1)=11\neq 0$. よって, $f(x,y)=0$ は点 $(2,-1)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつ. ここで, $x^3+3xy+y^5-x+1=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すれば, $3x^2+3y+(3x+5y^4)y'-1=0$. これより,

$$y'=-\frac{3x^2+3y-1}{3x+5y^4},\quad すなわち\quad \varphi'(x)=-\frac{3x^2+3\varphi(x)-1}{3x+5\varphi(x)^4}.$$

更に, $\varphi(2)=-1$ を用いて, $\varphi'(2)=-\dfrac{11+3\varphi(2)}{6+5\varphi(2)^4}=-\dfrac{8}{11}$.

(2) $f(x,y)=\cos x+2y\cos xy+2x\cos y-\pi=0$ とおく. $f_y(x,y)=2(\cos xy-xy\sin xy-x\sin y)$ であり, $f(\pi/2,0)=0$, $f_y(\pi/2,0)=2\neq 0$. よって, $f(x,y)=0$ は点 $(\pi/2,0)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつ. ここで, $\cos x+2y\cos xy+2x\cos y-\pi=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すれば, $-\sin x+2y'\cos xy-2y(y+xy')\sin xy+2\cos y-2xy'\sin y=0$. これより,

$$y'=\frac{\sin x+2y^2\sin xy-2\cos y}{2\cos xy-2xy\sin xy-2x\sin y},\quad すなわち\quad \varphi'(x)=\frac{\sin x+2\varphi(x)^2\sin(x\varphi(x))-2\cos\varphi(x)}{2\cos(x\varphi(x))-2x\varphi(x)\sin(x\varphi(x))-2x\sin\varphi(x)}.$$

更に, $\varphi(\pi/2)=0$ を用いて, $\varphi'(\pi/2)=-1/2$.

3. (1) $f(x,y)=3x^2-xy^3+2xy+y-x$ とおく. $f_y(x,y)=-3xy^2+2x+1$ であり, $f(1,2)=0$, $f_y(1,2)=-9\neq 0$. よって, $f(x,y)=0$ は点 $\mathrm{P}(1,2)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつ. ここで, $3x^2-xy^3+2xy+y-x=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $6x-y^3-3xy^2y'+2y+2xy'+y'-1=0$. これより, $y'=\dfrac{6x-y^3+2y-1}{3xy^2-2x-1}$. $\varphi(1)=2$ を用いて, $\varphi'(1)=\dfrac{1}{9}$. よって, 点 P における接線の方程式は $y-2=\dfrac{1}{9}(x-1)$, すなわち $x-9y+17=0$. また, 法線の方程式は $9(x-1)+(y-2)=0$, すなわち $9x+y-11=0$.

(2) $f(x,y)=xe^{2y}-e^{xy}+\sin\pi xy+y$ とおく. $f_y(x,y)=2xe^{2y}-xe^{xy}+\pi x\cos\pi xy+1$ であり, $f(0,1)=0$, $f_y(0,1)=1\neq 0$. よって, $f(x,y)=0$ は点 $\mathrm{P}(0,1)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつ. ここで, $xe^{2y}-e^{xy}+\sin\pi xy+y=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $(1+2xy')e^{2y}-(y+xy')e^{xy}+\pi(y+xy')\cos\pi xy+y'=0$, これより, $y'=-\dfrac{e^{2y}-ye^{xy}+\pi y\cos\pi xy}{2xe^{2y}-xe^{xy}+\pi x\cos\pi xy+1}$. $\varphi(0)=1$ を用いて, $\varphi'(0)=-(e^2-1+\pi)$. よって, 点 P における接線の方程式は $y-1=-(e^2-1+\pi)x$, すなわち $(e^2-1+\pi)x+y-1=0$. また, 法線の方程式は $x-(e^2-1+\pi)(y-1)=0$.

4. (1) $f(x,y)=x^2-2xy^3+y^2$ とおく. $f_y(x,y)=-6xy^2+2y$ であり, $f(1,1)=0$, $f_y(1,1)=-4\neq 0$. よって, $f(x,y)=0$ は点 $\mathrm{P}(1,1)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつ. ここで, $x^2-2xy^3+y^2=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $2x-2y^3-6xy^2y'+2yy'=0$, 整理して $x-y^3-(3xy^2-y)y'=0$. 再度, 両辺を x で微分して $1-3y^2y'-(3y^2+6xyy'-y')y'-(3xy^2-y)y''=0$. ここで, $\varphi(1)=1$ を用いて, $-2\varphi'(1)=0$, $1-3\varphi'(1)-(3+5\varphi'(1))\varphi'(1)-2\varphi''(1)=0$. 従って, $\varphi'(1)=0$, $\varphi''(1)=1/2$ を得る.

(2) $f(x,y)=x^3-3y^3+2x^2y$ とおく. $f_y(x,y)=-9y^2+2x^2$ であり, $f(1,1)=0$, $f_y(1,1)=-7\neq 0$. よって, $f(x,y)=0$ は点 $\mathrm{P}(1,1)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつ. ここで, $x^3-3y^3+2x^2y=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分すると $3x^2-9y^2y'+4xy+2x^2y'=0$, 整理して $3x^2+4xy+(2x^2-9y^2)y'=0$. 再度, 両辺を x で微分して, $(6x+4y+4xy')+(4x-18yy')y'+(2x^2-9y^2)y''=0$. ここで, $\varphi(1)=1$ を用いて, $7-7\varphi'(1)=0$, $(10+4\varphi'(1))+(4-18\varphi'(1))\varphi'(1)-7\varphi''(1)=0$. 従って, $\varphi'(1)=1$, $\varphi''(1)=0$.

5. (1) $x^2+xy+2y^2=1$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $2x+y+xy'+4yy'=0$, 整理して $(2x+y)+(x+4y)y'=0$. 再度, 両辺を x で微分して, $(2+y')+(1+4y')y'+(x+4y)y''=0$. これから,

$$y'=-\frac{2x+y}{x+4y},\quad y''=-\frac{2+(2+4y')y'}{x+4y}.$$

$\varphi'(x)=0$ となる曲線上の点は, $\begin{cases}x^2+xy+2y^2=1\\ 2x+y=0\end{cases}$ を解くことにより, $(x,y)=\left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}},\mp\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$. 更に, 点 $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}},\mp\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ において $\varphi''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}}\right)=-\dfrac{2}{(\pm\frac{1}{\sqrt{7}})+4(\mp\frac{2}{\sqrt{7}})}=\pm\frac{2}{\sqrt{7}}\gtrless 0$. 従って, 陰関数 $y=\varphi(x)$ は点 $\left(\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ で極小値 $-\frac{2}{\sqrt{7}}$ をとり, 点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$ で極大値 $\frac{2}{\sqrt{7}}$ をとる.

(2) $x^2-xy+y^3=7$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して $2x-y-xy'+3y^2y'=0$, 整理して $(2x-y)-(x-3y^2)y'=0$. 再度, 両辺を x で微分して, $(2-y')-(1-6yy')y'-(x-3y^2)y''=0$. これから,

$$y'=\frac{2x-y}{x-3y^2},\quad y''=\frac{2-(2-6yy')y'}{x-3y^2}.$$

$\varphi'(x)=0$ となる曲線上の点は, $\begin{cases}x^2-xy+y^3=7\\ 2x-y=0\end{cases}$ を解くことにより, $(x,y)=(1,2)$. (注: 第 2 式を第 1 式に代入すると $(x-1)(8x^2+7x+7)=0$ を得る.) 更に, 点 $(1,2)$ において $\varphi''(1)=\frac{2}{1-12}=-\frac{2}{11}<0$. 従って, 陰関数 $y=\varphi(x)$ は点 $(1,2)$ で極大値 2 をとる.

【注意】 $f(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ は曲線 $f(x,y)=0$ 上の各点の近傍で (存在するなら) 一意に定まるが, x の関数として一意に定まるわけではない (例えば $x^2+y^2-1=0$ を考えよ). そのことを意識して, 上では「$x=a$ で極大値 b をとる」(間違えではない) ではなく「点 (a,b) で極大値 b をとる」という書き方にした.

6. 曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 (a,b) で $g'(a,b)=0$ を満たすものをこの曲線の特異点と呼ぶ. 点 (a,b) が条件 $g(x,y)=0$ の下での関数 $f(x,y)$ の極値を与えるとき (f,g の微分可能性を仮定), (a,b) が $g(x,y)=0$ の特異点でないならば, $f'(a,b)=\lambda\, g'(a,b)$ を満たす $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在する (Lagrange の未定乗数法).

(1) $g(x,y)=x^2+y^2-2$ とおけば, $g'(x,y)=(2x,2y)=(0,0)$ となる点は $(0,0)$ だけであり, $g(0,0)=-2\neq 0$ となるので $g(x,y)=0$ には特異点は存在しない. そこで, 条件 $g(x,y)=0$ の下での $f(x,y)=y-x$ の極値を求めるために, $F(x,y,\lambda):=f(x,y)-\lambda g(x,y)=y-x-\lambda(x^2+y^2-2)$ とおいて,

$$F_x=-1-2\lambda x=0,\quad F_y=1-2\lambda y=0,\quad -F_\lambda=x^2+y^2-2=0$$

を解く (F の停留点を求めることに他ならない). 第 1 式, 第 2 式より, $x=-\frac{1}{2\lambda}$, $y=\frac{1}{2\lambda}$ $(\lambda\neq 0)$. これらを第 3 式に代入して $4\lambda^2=1$ を得るので, $(x,y,\lambda)=(\pm1,\mp1,\mp1/2)$ が解となる. よって, 極値を与える点の候補は $(\pm1,\mp1)$ であり, $f(\pm1,\mp1)=\mp2$. 条件 $g(x,y)=0$ は円周 (有界な連結集合) を表すので, その上で $f(x,y)$ は点 $(1,-1)$ で (最小値かつ) 極小値 -2 をとり, 点 $(-1,1)$ で (最大値かつ) 極大値 2 をとる.

(2) $g(x,y)=x^2+2y^2-1$ とおけば, $g'(x,y)=(2x,4y)=(0,0)$ となる点は $(0,0)$ だけであり, $g(0,0)=-1\neq 0$ となるので $g(x,y)=0$ には特異点は存在しない. そこで, 条件 $g(x,y)=0$ の下での $f(x,y)=xy$ の極値を求めるために, $F(x,y,\lambda):=f(x,y)-\lambda g(x,y)=xy-\lambda(x^2+2y^2-1)$ とおいて,

$$F_x=y-2\lambda x=0,\quad F_y=x-4\lambda y=0,\quad -F_\lambda=x^2+2y^2-1=0$$

を解く. 第 1 式, 第 2 式より, $\begin{bmatrix}-2\lambda & 1\\ 1 & -4\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. 点 $(0,0)$ は $g(x,y)=0$ 上にないから, この連立 1 次方程式は非自明解をもつ必要がある. 係数行列の行列式を計算して $8\lambda^2=1$ を得るから,

$\lambda = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. よって, $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ となり, これを上の第 3 式に代入して, $2x^2 = 1$. 従って, 求める解は $(x, y, \lambda) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$. よって, 極値を与える点の候補は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\right)$ であり, $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right) = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $f\left(\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2}\right) = \pm\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. 条件 $g(x, y) = 0$ は楕円の周 (有界な連結集合) を表すので, その上で $f(x, y)$ は点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{2}\right)$ で (最小値かつ) 極小値 $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ をとり, 点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{2}\right)$ で (最大値かつ) 極大値 $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ をとる.

7. (1) まず, $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ の D の内部 : $x^2 + y^2 < 1$ での極値を調べる. $f'(x, y) = (2x + y,\ x + 2y) = (0, 0)$ を解いて停留点は $(0, 0) \in D$ のみ. $f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の行列式および $(1, 1)$ 成分はともに正であるから, $f(x, y)$ は点 $(0, 0)$ で極小値 $f(0, 0) = 0$ をとる.

次に, D の周 $\partial D : x^2 + y^2 = 1$ 上での極値を調べる. 曲線 $x^2 + y^2 = 1$ 上には特異点がないので, $F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ とおいて,

$$F_x = 2x + y - 2\lambda x = 0, \quad F_y = x + 2y - 2\lambda y = 0, \quad -F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

を解く. 第 1 式, 第 2 式より, $\begin{bmatrix} 2 - 2\lambda & 1 \\ 1 & 2 - 2\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 点 $(0, 0)$ は $x^2 + y^2 = 1$ 上にないから, この連立 1 次方程式は非自明解をもつ必要がある. 係数行列の行列式を計算して $4(\lambda - 1)^2 = 1$ を得るから, $\lambda = \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$. $\lambda = \dfrac{1}{2}$ のときは $y = -x$ となり, これを上の第 3 式に代入して, $2x^2 = 1$. また, $\lambda = \dfrac{3}{2}$ のときは $y = x$ となり, これを上の第 3 式に代入して, やはり $2x^2 = 1$. よって, 求める方程式の解は $(x, y, \lambda) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3}{2}\right)$. ここで, 極値を与える点の候補は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ であり, $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2}$. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ は円周 (有界な連結集合) を表すので, その上で $f(x, y)$ は点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で (最小値かつ) 極小値 $\dfrac{1}{2}$ をとり, 点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で (最大値かつ) 極大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる.

以上より, $f(x, y)$ は D において, 点 $(0, 0)$ で最小値 0 をとり, 点 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる.

(2) まず, $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$ の D の内部 : $x^2 + y^2 < 1$ での極値を調べる. $f'(x, y) = (2x - 1,\ 2y - 1) = (0, 0)$ を解いて停留点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$ のみ. $f''(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ の行列式および $(1, 1)$ 成分はともに正であるから, $f(x, y)$ は点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で極小値 $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ をとる.

次に, D の周 $\partial D : x^2 + y^2 = 1$ 上での極値を調べる. 曲線 $x^2 + y^2 = 1$ 上には特異点がないので, $F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - x - y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ とおいて,

$$F_x = 2x - 1 - 2\lambda x = 0, \quad F_y = 2y - 1 - 2\lambda y = 0, \quad -F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

を解く. 第 1 式, 第 2 式より, $x = y = \dfrac{1}{2(1 - \lambda)}$ $(\lambda \neq 1)$. これを第 3 式に代入して $2(1 - \lambda)^2 = 1$. よって, 求める方程式の解は $(x, y, \lambda) = \left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1 \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ここで, 極値を与える点の候補は $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ であり, $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \mp \sqrt{2}$. 条件 $x^2 + y^2 = 1$ は円周 (有界な連結集合) を表すので, その上で $f(x, y)$ は点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で (最小値かつ) 極小値 $1 - \sqrt{2}$ をとり, 点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で (最大値かつ) 極大値 $1 + \sqrt{2}$ をとる.

以上より, $f(x, y)$ は D において, 点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとり, 点 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最大値 $1 + \sqrt{2}$ をとる.

【問題 5.1】

1. (1) $\displaystyle\int_0^2 dx\int_{x^2}^{2x} xe^y\,dy = \int_0^2\Big[\,xe^y\,\Big]_{y=x^2}^{y=2x}dx = \int_0^2(xe^{2x}-xe^{x^2})\,dx = \Big[\,\frac{1}{2}xe^{2x}\,\Big]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}\,dx - \Big[\,\frac{1}{2}e^{x^2}\,\Big]_0^2$

$\displaystyle = e^4 - \frac{1}{2}\Big[\,\frac{1}{2}e^{2x}\,\Big]_0^2 - \frac{1}{2}(e^4-1) = \frac{1}{2}(e^4+1) - \frac{1}{4}(e^4-1) = \frac{1}{4}(e^4+3).$

(2) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_0^{\pi/2} y\sin xy\,dx = \int_0^1\Big[-\cos xy\,\Big]_{x=0}^{x=\pi/2}dy = \int_0^1\Big(1-\cos\frac{\pi y}{2}\Big)\,dy = \Big[\,y-\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi y}{2}\,\Big]_0^1 = 1-\frac{2}{\pi}.$

2. (1) $\displaystyle\iint_D \sin(2x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi/2}dx\int_0^{\pi/2}\sin(2x+y)\,dy = \int_0^{\pi/2}\Big[-\cos(2x+y)\Big]_{y=0}^{y=\pi/2}dx$

$\displaystyle = \int_0^{\pi/2}(\sin 2x+\cos 2x)\,dx = \Big[\,\frac{1}{2}(-\cos 2x+\sin 2x)\,\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\{1-(-1)\} = 1.$

(2) $\displaystyle\iint_D (x^2y+y^2)\,dxdy = \int_1^2 dx\int_2^3(x^2y+y^2)\,dy = \int_1^2\Big[\,\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{3}y^3\,\Big]_{y=2}^{y=3}dx = \int_1^2\Big(\frac{5}{2}x^2+\frac{19}{3}\Big)\,dx$

$\displaystyle = \Big[\,\frac{5}{6}x^3+\frac{19}{3}x\,\Big]_1^2 = \frac{35}{6}+\frac{19}{3} = \frac{73}{6}.$

(3) $\displaystyle\iint_D x\,dxdy = \int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \Big[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\,\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$

(4) $\displaystyle\iint_D \sqrt{a^2-y^2}\,dxdy = \int_{-a}^a dy\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{a^2-y^2}\,dx = \int_{-a}^a 2(a^2-y^2)\,dx = 4\Big[\,a^2y-\frac{1}{3}y^3\,\Big]_0^a = \frac{8a^3}{3}.$

(5) $\displaystyle\iint_D xy^2\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x xy^2\,dy = \int_0^1\Big[\,\frac{1}{3}xy^3\,\Big]_{y=0}^{y=x}dx = \int_0^1\frac{1}{3}x^4\,dx = \Big[\,\frac{1}{15}x^5\,\Big]_0^1 = \frac{1}{15}.$

(6) D は $0\leqslant x\leqslant 3/2,\ x\leqslant y\leqslant \min\{2x, 3-x\}$ と表される．

$\displaystyle\iint_D (2x-y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_x^{2x}(2x-y)\,dy + \int_1^{3/2}dx\int_x^{3-x}(2x-y)\,dy$

$\displaystyle = \int_0^1\Big[\,2xy-\frac{1}{2}y^2\,\Big]_{y=x}^{y=2x}dx + \int_1^{3/2}\Big[\,2xy-\frac{1}{2}y^2\,\Big]_{y=x}^{y=3-x}dx$

$\displaystyle = \int_0^1\frac{1}{2}x^2\,dx + \int_1^{3/2}\Big(2x-\frac{3}{2}\Big)(3-2x)\,dx = \int_0^1\frac{1}{2}x^2\,dx + \int_1^{3/2}\Big\{-(2x-3)^2-\frac{3}{2}(2x-3)\Big\}\,dx$

$\displaystyle = \Big[\,\frac{1}{6}x^3\,\Big]_0^1 + \Big[-\frac{1}{6}(2x-3)^3-\frac{3}{8}(2x-3)^2\,\Big]_1^{3/2} = \frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{3}{8} = \frac{3}{8}.$

(7) $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz = \iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} dxdy\int_0^{1-x-y} z\,dz = \iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}}\frac{1}{2}(1-x-y)^2\,dxdy$

$\displaystyle = \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(1-x-y)^2\,dy = \int_0^1\Big[-\frac{1}{6}(1-x-y)^3\,\Big]_0^{1-x}dx$

$\displaystyle = \int_0^1\frac{1}{6}(1-x)^3\,dx = \Big[-\frac{1}{24}(1-x)^4\,\Big]_0^1 = \frac{1}{24}.$

(8) $\displaystyle\iiint_D y\,dxdydz = \iiint_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\\ x+2y+3z\leqslant 6}} y\,dxdydz = \iint_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 6}} dxdy\int_0^{(6-x-2y)/3} y\,dz$

$\displaystyle = \iint_{\substack{x\geqslant 0, y\geqslant 0\\ x+2y\leqslant 6}}\frac{1}{3}(6-x-2y)y\,dxdy = \int_0^6 dx\int_0^{(6-x)/2}\Big\{\frac{1}{3}(6-x)y-\frac{2}{3}y^2\Big\}\,dy$

$\displaystyle = \int_0^6\Big[\,\frac{1}{6}(6-x)y^2-\frac{2}{9}y^3\Big]_{y=0}^{y=(6-x)/2}dx = \int_0^6\Big\{\frac{1}{24}(6-x)^3-\frac{1}{36}(6-x)^3\Big\}\,dx$

$\displaystyle = \int_0^6\frac{1}{72}(6-x)^3\,dx = \Big[-\frac{1}{288}(6-x)^4\,\Big]_0^6 = \frac{9}{2}.$

3. (1) $$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \iint_{\substack{x^2+y^2/4 \leqslant 1 \\ y \geqslant 0}} f(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{2} dy \int_{-\sqrt{1-y^2/4}}^{\sqrt{1-y^2/4}} f(x,y)\,dx.$$

(2) $$\int_{-2}^{1} dx \int_{x^2}^{-x+2} f(x,y)\,dy = \iint_{\substack{-2 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 \leqslant y \leqslant -x+2}} f(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{4} dy \int_{-\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

(3) $$\int_{0}^{4} dy \int_{y}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dx = \iint_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 4 \\ x^2/4 \leqslant y \leqslant x}} f(x,y)\,dxdy = \int_{0}^{4} dx \int_{x^2/4}^{x} f(x,y)\,dy.$$

(4) $$\int_{0}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \iint_{\substack{0 \leqslant y \leqslant 4 \\ y-2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-2}^{0} dx \int_{0}^{x+2} f(x,y)\,dy + \int_{0}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy.$$

4. 教科書の定理 5.1.1, すなわち長方形領域 D で積分可能な関数 $f(x,y)$ に対して,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j$$

が成り立つことを用いて (1), (2), (3) を説明しよう. 但し, 講義での記法と同じく, (ξ_{ij}, η_{ij}) は $\varDelta_{ij}$ の任意の点であり, $\varDelta x_i := x_i - x_{i-1}$, $\varDelta y_j := y_j - y_{j-1}$ と書いた (よって $\varDelta x_i \varDelta y_j$ は $\varDelta_{ij}$ の面積を表す).

(1) $f(x,y), g(x,y)$ が D で積分可能であるとき, 重積分の定義と極限の性質により,

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy \pm \iint_D g(x,y)\,dxdy &= \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \pm \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} g(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \\
&= \lim_{|\varDelta| \to 0} \left(\sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \pm \sum_{i,j} g(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \right) \\
&= \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} \{ f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \pm g(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \}\,\varDelta x_i \varDelta y_j. \qquad \text{(有限和に対する分配法則を用いた)}
\end{aligned}$$

これより, $f(x,y) \pm g(x,y)$ も D で積分可能であって,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \pm \iint_D g(x,y)\,dxdy = \iint_D \{ f(x,y) \pm g(x,y) \}\,dxdy$$

が成り立つことが分かる.

(2) $f(x,y)$ が D で積分可能で, $c \in \mathbb{R}$ が定数であるとき, 重積分の定義と極限の性質により,

$$\begin{aligned}
c \iint_D f(x,y)\,dxdy &= c \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \\
&= \lim_{|\varDelta| \to 0} c \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j = \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} c\,f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j
\end{aligned}$$

これより, $cf(x,y)$ も D で積分可能であって,

$$c \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D c\,f(x,y)\,dxdy$$

が成り立つことが分かる.

(3) $f(x,y)$ が D で積分可能であるとき, まず有限和に対する三角不等式を用いて,

$$\left| \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \right| \leqslant \sum_{i,j} |f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j| = \sum_{i,j} |f(\xi_{ij}, \eta_{ij})|\,\varDelta x_i \varDelta y_j$$

よって, 重積分の定義と極限の性質により,

$$\begin{aligned}
\left| \iint_D f(x,y)\,dxdy \right| &= \left| \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \right| \\
&= \lim_{|\varDelta| \to 0} \left| \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,\varDelta x_i \varDelta y_j \right| \qquad (\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R} \text{ の連続性を用いた}) \\
&\leqslant \lim_{|\varDelta| \to 0} \sum_{i,j} |f(\xi_{ij}, \eta_{ij})|\,\varDelta x_i \varDelta y_j = \iint_D |f(x,y)|\,dxdy.
\end{aligned}$$

【問題 5.2】

1. 平面の極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ を用いて計算する ($dxdy = r\,drd\theta$ であることに注意).

(1) D は $a \leqslant r \leqslant 2a,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ に対応する. $m \in \mathbb{R}$ のとき,

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} = \iint_{\substack{a \leqslant r \leqslant 2a \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \frac{r\,drd\theta}{r^{2m}} = \left(\int_a^{2a} \frac{dr}{r^{2m-1}}\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 2\pi \int_a^{2a} r^{1-2m}\,dr \quad \text{であるから,}$$

- $m = 1$ ならば, $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = 2\pi \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = 2\pi \Big[\log r\Big]_a^{2a} = 2\pi \log 2.$
- $m \neq 1$ ならば, $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^m} = 2\pi \Big[\frac{r^{2-2m}}{2-2m}\Big]_a^{2a} = \frac{(2^{2-2m}-1)\pi a^{2-2m}}{1-m}.$

(2) D は $0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ に対応する. $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \sqrt{1-r^2}\,r\,drd\theta = \left(\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 2\pi\Big[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\Big]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$

(3) D は $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ に対応する. $\displaystyle\iint_D x\,dxdy = \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \cos\theta \\ -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2}} (r\cos\theta)\,r\,drd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} r^2\cos\theta\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[\frac{r^3}{3}\cos\theta\Big]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$

【注】一般に, 変数分離形の 2 変数関数 $f(x)g(y)$ を長方形領域 $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d$ で積分するとき,

$$\iint_{\substack{a \leqslant x \leqslant b \\ c \leqslant y \leqslant d}} f(x)g(y)\,dxdy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

が成り立つ. 累次積分を実行すればほとんど明らかな事実であるが, 公式として覚えておくと便利. 3 重積分でも同様な等式が成り立つ.

2. (1) $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ とおけば, $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$. (Jacobian の計算は, 逆写像定理を用いて, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} = -\dfrac{1}{2}$ としてもよい.) また, D は $0 \leqslant u \leqslant 2,\ 0 \leqslant v \leqslant 2$ に対応する. よって, $\displaystyle\iint_D (x-y)e^{x+y}\,dxdy = \iint_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 2 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2}} ve^u \left|-\frac{1}{2}\right| dudv = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 e^u\,du\right)\left(\int_0^2 v\,dv\right) = \frac{1}{2}\Big[e^u\Big]_0^2\Big[\frac{v^2}{2}\Big]_0^2 = e^2 - 1.$

(2) $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ とおけば, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$. また, D は $0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ に対応する. よって, $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy = \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} (ar\cos\theta)^2\,abr\,drd\theta = a^3b\left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta\right) = a^3b\cdot\frac{1}{4}\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = a^3b\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^3 b}{4}.$

(3) $x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2$ に注目して, $u = x+y,\ v = y$ とおく. このとき, $x = u-v,\ y = v$ であるから, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. また, D は $u^2+v^2 \leqslant 1$ に対応する. よって, 更に極座標変換を用いることにより, $\displaystyle\iint_D (x+y)^4\,dxdy = \iint_{u^2+v^2 \leqslant 1} u^4\,dudv = \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} (r\cos\theta)^4 r\,drd\theta = \left(\int_0^1 r^5\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,d\theta\right) = \frac{1}{6}\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$

3. 空間の極座標 (r,θ,φ) に対して, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$ であることに注意する. (a は正定数とする.)

(1) D は $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ に対応するから, $\displaystyle\iiint_D x\,dxdydz = \iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}} r\sin\theta\cos\varphi\cdot$

$$r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \left(\int_0^a r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right) = \frac{a^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi a^4}{16}.$$

(2) D は $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ に対応するから, $\displaystyle\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz =$

$$\iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^2\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \left(\int_0^a r^4\,dr\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}d\varphi\right) = \frac{a^5}{5}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4\pi a^5}{5}.$$

4. 極座標 (r,θ) を用いれば, D は $0 \leqslant r \leqslant f(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ と表される. よって, 図形 D の面積は

$$S(D) = \iint_D dxdy = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant f(\theta)\\ \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta}} r\,drd\theta = \int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{f(\theta)} r\,dr = \int_\alpha^\beta \Big[\,\frac{r^2}{2}\,\Big]_{r=0}^{r=f(\theta)} d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta.$$

この公式を用いて, 各図形の面積を計算する. 以下では, 各問の図形を D と表す.

(1) $S(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$. ($D$ は円 $x^2+y^2 \leqslant y$ に他ならない.)

(2) $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$ を極座標 (r,θ) を用いて表すと, $(r^2)^2 = (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 = r^2\cos 2\theta$. これを整理して, $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ $\left(-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{4}\right)$. 図形の x 軸, y 軸に関する対称性に注意して,

$$S(D) = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sqrt{\cos 2\theta}\,)^2\,d\theta = 2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = 2\Big[\,\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\pi/4} = 1.$$

(3) $S(D) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{a(1+\cos\theta)\}^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta \overset{\varphi=\theta/2}{=} \frac{a^2}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2\cos^2\varphi)^2\,2\,d\varphi =$

$$8a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi = 8a^2\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

【注】次の積分は比較的よく現れるので覚えておくと便利 (前期の講義で説明した):

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\,d\theta = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\,\dfrac{\pi}{2} & (n = 0,2,4,\dots), \\[2ex] \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n = 1,3,5,\dots). \end{cases}$$

例えば,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,d\theta = \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}, \qquad \int_0^{\pi/2}\sin^7\theta\,d\theta = \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3} = \frac{16}{35}.$$

【問題 5.3】

1. 以下では, 断らない限り, 曲線にはパラメータが増加する方向の向きが与えられるとする.

(1) $(1,1)$ から $(-1,3)$ へ向かうベクトルは $(-2,2)=2(-1,1)$ であるから, C は $\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t+1 \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$ とパラメータ表示できる. よって,

$$\begin{aligned}\int_C x^2\,dx+2xy\,dy &= \int_0^2 \Big(x^2\,\frac{dx}{dt}+2xy\,\frac{dy}{dt}\Big)\,dt = \int_0^2 \{(-t+1)^2(-1)+2(-t+1)(t+1)\}\,dt \\ &= \int_0^2 (-3t^2+2t+1)\,dt = \Big[-t^3+t^2+t\Big]_0^2 = -2.\end{aligned}$$

(2) C は $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2)$ とパラメータ表示できる. よって,

$$\begin{aligned}\int_C xy\,dx+e^{x^2}\,dy &= \int_0^2 \Big(xy\,\frac{dx}{dt}+e^{x^2}\,\frac{dy}{dt}\Big)\,dt = \int_0^2 (t\cdot t^2+e^{t^2}\cdot 2t)\,dt = \Big[\,\frac{t^4}{4}+e^{t^2}\,\Big]_0^2 \\ &= 4+(e^4-1)=e^4+3.\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\int_C y^2\,dx+x^2\,dy &= \int_0^\pi \Big(y^2\,\frac{dx}{dt}+x^2\,\frac{dy}{dt}\Big)\,dt = \int_0^\pi \{\sin^2 t\cdot(-\sin t)+\cos^2 t\cdot\cos t\}\,dt \\ &= -2\int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,dt = -2\cdot\frac{2}{3} = -\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

2. Green の定理 $\displaystyle\int_{\partial D} P\,dx+Q\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dxdy$ を用いて計算する.

(1) $$\begin{aligned}\int_C (e^x+y)\,dx+(y^4+x^3)\,dy &= \iint_{x^2+x^2\leqslant 1} \Big\{\frac{\partial}{\partial x}(y^4+x^3)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x+y)\Big\}\,dxdy \\ &= \iint_{x^2+x^2\leqslant 1} (3x^2-1)\,dxdy = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} (3r^2\cos^2\theta-1)r\,drd\theta \\ &= \Big(\int_0^1 3r^3\,dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\Big)-\Big(\int_0^1 r\,dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi}d\theta\Big) = \frac{3}{4}\cdot 4\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta-\frac{1}{2}\cdot 2\pi \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\pi = -\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\int_C (y^3-y)\,dx+(3y^2x-x)\,dy &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \Big\{\frac{\partial}{\partial x}(3y^2x-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y^3-y)\Big\}\,dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \{(3y^2-1)-(3y^2-1)\}\,dxdy = 0.\end{aligned}$$

3. まず, Green の定理により,

$$\int_{\partial D} x\,dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}x\,dxdy = \iint_D dxdy,\quad \int_{\partial D} y\,dx = \iint_D \Big(-\frac{\partial}{\partial y}y\Big)\,dxdy = -\iint_D dxdy,$$
$$\int_{\partial D}(x\,dy-y\,dx) = \iint_D \Big\{\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\Big\}\,dxdy = 2\iint_D dxdy.$$

よって,

$$S(D) = \iint_D dxdy = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy-y\,dx).$$

これを用いて (1) から (3) の各図形 (D と表す) の面積を計算する. どの線積分を用いても計算は可能であるが, 以下ではそれぞれの図形に対して計算効率がよさそうな線積分を選んで計算した.

(1) $$\begin{aligned}S(D) &= \int_{\partial D} x\,dy = \int_0^{2\pi} x\,\frac{dy}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} a\cos^3\theta\cdot 3a\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = 3a^2\int_0^{2\pi}\cos^4\theta\,\sin^2\theta\,d\theta \\ &= 3a^2\cdot 4\int_0^{\pi/2}(\cos^4\theta-\cos^6\theta)\,d\theta = 12a^2\cdot\Big(1-\frac{5}{6}\Big)\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{8}.\end{aligned}$$

(2) ∂D は $x = a(1+\cos\theta)\cos\theta,\ y = a(1+\cos\theta)\sin\theta\ \ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ とパラメータ表示される．このとき，

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} &= a(1+\cos\theta)\cos\theta\cdot\{a(1+\cos\theta)\sin\theta\}' - a(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot\{a(1+\cos\theta)\cos\theta\}' \\ &= a^2(1+\cos\theta)\bigl(\cos\theta\,\{-\sin^2\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta\} - \sin\theta\,\{-\sin\theta\cos\theta - (1+\cos\theta)\sin\theta\}\bigr) \\ &= a^2(1+\cos\theta)^2 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} S(D) &= \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Bigl(x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta}\Bigr)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta \qquad \text{(問題 5.2 の 4 (3) と同じ形)} \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\Bigl(2\cos^2\frac{\theta}{2}\Bigr)^2 d\theta \overset{\varphi=\theta/2}{=} 2a^2\int_0^{\pi}\cos^4\varphi\cdot 2\,d\varphi = 8a^2\int_0^{\pi/2}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{3\pi a^2}{2}. \end{aligned}$$

(3) $S(D) = -\displaystyle\int_{\partial D} y\,dx = -\int_0^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\sin^5\theta\cdot(-\sin\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\sin^6\theta\,d\theta = 4\cdot\frac{5\pi}{32} = \frac{5\pi}{8}.$

4. $D \subset \mathbb{R}^2$ を単連結な (=“穴のない”) 平面領域とし，D 内の任意の 2 点 A, B を固定する．D 上の C^1 級関数 $P(x,y), Q(x,y)$ が

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \tag{$\star$}$$

を満たすとき，A を始点，B を終点とする D 内の勝手な 2 本の単一曲線 $C_{\mathrm{AB}}^{(1)}, C_{\mathrm{AB}}^{(2)}$ (区分的に滑らかであると仮定) に対して，

$$\int_{C_{\mathrm{AB}}^{(1)}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{C_{\mathrm{AB}}^{(2)}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \tag{$\dagger$}$$

が成り立つ (下で簡単な場合に証明する)．従って，この線積分は始点 A と終点 B だけで決まり，A と B を結ぶ曲線の取り方に依らないので，

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

という表し方が意味をもつ．それでは，$C_{\mathrm{AB}}^{(1)}$ と $C_{\mathrm{AB}}^{(2)}$ が始点 A と終点 B 以外に共有点をもたない場合に，条件 ($\star$) の下で ($\dagger$) が成り立つことを示そう．説明のために，$C_{\mathrm{AB}}^{(1)}$ と $-C_{\mathrm{AB}}^{(2)}$ (逆向き) をつなげてできる閉曲線 $\varGamma := C_{\mathrm{AB}}^{(1)} \cup (-C_{\mathrm{AB}}^{(2)})$ で囲まれる領域を $\varOmega$ とする．このとき，$\varGamma$ と $\partial\varOmega$ の向きが一致すると考えてよい (向きが逆なら曲線の番号を入れ換えよ)．ここで，Green の定理により，

$$\int_{C_{\mathrm{AB}}^{(1)} \cup (-C_{\mathrm{AB}}^{(2)})} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial\varOmega} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\varOmega}(Q_x - P_y)\,dxdy = 0.$$

従って，

$$0 = \int_{C_{\mathrm{AB}}^{(1)} \cup (-C_{\mathrm{AB}}^{(2)})} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_{\mathrm{AB}}^{(1)}} P\,dx + Q\,dy - \int_{C_{\mathrm{AB}}^{(2)}} P\,dx + Q\,dy$$

となり，確かに ($\dagger$) が成り立つ．

5. 上の **4** の条件 ($\star$) が満たされることを示せばよい．

(1) 関数 $P(x,y) := e^x + 2xy,\ Q(x,y) := e^{2y} + x^2$ は $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級であり，$P_y = 2x = Q_x$ が成り立つ．

(2) $f(t)$ が $\mathbb{R}$ 上の C^1 級関数であるとき，2 変数関数 $P(x,y) := yf(xy),\ Q(x,y) := xf(xy)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で C^1 級であって，$P_y = f(xy) + xyf'(xy) = Q_x$ が成り立つ．

6. 関数 $P := -\dfrac{y}{x^2+y^2},\ Q := \dfrac{x}{x^2+y^2}$ は $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ で C^1 級であることに注意する．

- $(0,0) \notin D$ のとき： 関数 P, Q は $\overline{D}$ を含む領域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^1 級となる．その領域で
$$\begin{aligned} Q_x - P_y &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(x^2+y^2) - y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$
であるから, Green の定理により,
$$\int_{\partial D} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy = 0.$$
- $(0,0) \in D$ のとき： $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば, $C_\varepsilon := \{(x,y) \mid x^2+y^2 = \varepsilon^2\} \subset D$ が成り立つ．このとき, $D_\varepsilon := \{(x,y) \in D \mid x^2+y^2 > \varepsilon^2\}$ とおけば, $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup (-C_\varepsilon)$ (C_ε は反時計回りの向きをもち, $-C_\varepsilon$ は時計回りの向きをもつとする)．関数 P, Q は $\overline{D_\varepsilon}$ を含む領域 $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^1 級となるので, Green の定理により,
$$\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{\partial D_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_\varepsilon} (Q_x - P_y)\,dxdy = 0.$$
ここで,
$$\int_{\partial D_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D \cup (-C_\varepsilon)} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy - \int_{C_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy$$
であるから,
$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_\varepsilon} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}.$$
右辺の C_ε を $x = \varepsilon\cos\theta,\ y = \varepsilon\sin\theta\ \ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ とパラメータ表示し,
$$\int_{\partial D} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\varepsilon\sin\theta\,\{\varepsilon\cos\theta\}' + \varepsilon\cos\theta\,\{\varepsilon\sin\theta\}'}{\varepsilon^2}\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

【問題 5.4】

1. 各図形の体積を V で表す.

(1) まず, $u=\dfrac{x}{a}, v=\dfrac{y}{b}, w=\dfrac{z}{c}$ とおけば, $x=au,\ y=bv,\ z=cw$ であるから, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc$. よって,

$$V=\iiint_{(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2\leqslant 1} dxdydz=\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} abc\,dudvdw=abc\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} dudvdw.$$

ここで, $\displaystyle\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} dudvdw$ は半径 1 の球の体積を表すので, $V=abc\cdot\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{4\pi abc}{3}$.

(2) まず, $x=u^3,\ y=v^3,\ z=w^3$ とおけば, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{vmatrix}=27u^2v^2w^2$. この変数変換を行った後, 空間の極座標変換を用いることにより,

$$\begin{aligned}
V&=\iiint_{x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}\leqslant a^{2/3}} dxdydz=\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant b^2} 27u^2v^2w^2\,dudvdw \quad (b:=a^{1/3})\\
&=27\iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant b\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} (r\sin\theta\cos\varphi)^2(r\sin\theta\sin\varphi)^2(r\cos\theta)^2\,r^2\sin\theta\,drd\theta\,d\varphi\\
&=27\left(\int_0^b r^8\,dr\right)\left(\int_0^\pi \cos^2\theta\sin^5\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi\right)\\
&=27\cdot\frac{b^9}{9}\left(2\int_0^{\pi/2}(\sin^5\theta-\sin^7\theta)\,d\theta\right)\left(4\int_0^{\pi/4}(\sin^2\varphi-\sin^4\varphi)\,d\varphi\right)\\
&=24a^3\cdot\left(1-\frac{6}{7}\right)\frac{4}{5}\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{4\pi a^3}{35}.
\end{aligned}$$

(3) 曲面 $z=x^2+y^2$ と平面 $z=2x$ との交線の方程式は $z=x^2+y^2=2x$. よって, 考えている図形は $x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x,\ x^2+y^2\leqslant 2x\ (\Leftrightarrow\ (x-1)^2+y^2\leqslant 1)$ と表されるので, 体積は

$$\begin{aligned}
V&=\iiint_{\substack{x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x\\ x^2+y^2\leqslant 2x}} dxdydz=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x} dxdy\int_{x^2+y^2}^{2x} dz\\
&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x}\{2x-(x^2+y^2)\}\,dxdy=\iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 1}\{1-(x-1)^2-y^2\}\,dxdy.
\end{aligned}$$

ここで, 点 $(1,0)$ を中心とする極座標 (r,θ) を用いれば, $x-1=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ であり, (x,y) の (r,θ) に関する Jacobian は (通常の極座標変換の場合と同じく) r となるから,

$$V=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}(1-r^2)\,r\,drd\theta=\left(\int_0^1(r-r^3)\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\pi=\frac{\pi}{2}.$$

【別法】原点 $(0,0)$ を中心とする (通常の) 極座標 (r,θ) を用いて計算することもできる. 実際, このとき, $x^2+y^2\leqslant 2x$ は $-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta$ と表されるから,

$$\begin{aligned}
V&=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2x}\{2x-(x^2+y^2)\}\,dxdy=\iint_{\substack{-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\ 0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta}}(2r\cos\theta-r^2)\,r\,drd\theta\\
&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big[\frac{2r^3}{3}\cos\theta-\frac{r^4}{4}\Big]_0^{2\cos\theta}d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{4}{3}\cos^4\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(4) $u=x+y,\ v=y+z,\ w=z+x$ とおけば, $x+y+z=\frac{1}{2}(u+v+w)$ となることに注意して,

$$x=\frac{u-v+w}{2},\ y=\frac{u+v-w}{2},\ z=\frac{-u+v+w}{2},\quad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

よって, 求める体積は

$$V = \iiint_{\substack{0\leqslant x+y\leqslant 1\\ 0\leqslant y+z\leqslant 1\\ 0\leqslant z+x\leqslant 1}} dxdydz = \iiint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ 0\leqslant v\leqslant 1\\ 0\leqslant w\leqslant 1}} \frac{1}{2}\,dudvdw = \frac{1}{2}.$$

【注】逆写像定理によれば, (x,y,z) の (u,v,w) に関する Jacobi 行列と (u,v,w) の (x,y,z) に関する Jacobi 行列とは互いに逆行列の関係にあるから, それぞれの Jacobian は互いに逆数の関係にある. よって, x,y,z を u,v,w の式で表さなくても, $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix} = 2$ から直接 $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \dfrac{1}{2}$ が得られる.

(5) 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = z$ を空間の極座標 (r,θ,φ) を用いて表すと, $(r^2)^2 = r\cos\theta$, すなわち $r = \sqrt[3]{\cos\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$ となる. よって, 考えている図形は

$$0\leqslant r\leqslant \sqrt[3]{\cos\theta},\ \ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ \ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

で与えられるので, その体積は

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_{(x^2+y^2+z^2)^2\leqslant z} dxdydz = \iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant \sqrt[3]{\cos\theta}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi\\
&= \left(\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant \sqrt[3]{\cos\theta}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} r^2\sin\theta\,drd\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = 2\pi\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2\sin\theta\,dr\\
&= 2\pi\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\sin\theta\right]_{r=0}^{r=\sqrt[3]{\cos\theta}} d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{2\pi}{3}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

2. 考えている図形 V は $a\leqslant x\leqslant b,\ y^2+z^2\leqslant f(x)^2$ で与えられるから,

$$v(V) = \iiint_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ y^2+z^2\leqslant f(x)^2}} dxdydz = \int_a^b dx\iint_{y^2+z^2\leqslant f(x)^2} dydz.$$

ここで, yz 平面での極座標 (r,θ) を用いれば,

$$\iint_{y^2+z^2\leqslant f(x)^2} dydz = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant |f(x)|\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} r\,drd\theta = \left(\int_0^{|f(x)|} r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \frac{|f(x)|^2}{2}\cdot 2\pi = \pi f(x)^2.$$

よって,

$$v(V) = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

3. 各図形を V で表す. (1), (2) については前問の結果を用いて V の体積 $v(V)$ を計算する.

(1) $v(V) = \pi\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$

(2) $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2$ は, $b-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant b+\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$ と表されるから,

$$\begin{aligned}
v(V) &= \pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2}\,)^2\,dx - \pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2}\,)^2\,dx\\
&= \pi\int_{-a}^{a}\left\{(b+\sqrt{a^2-x^2}\,)^2-(b-\sqrt{a^2-x^2}\,)^2\right\}dx = \pi\int_{-a}^{a}2b\cdot 2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\\
&= 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 4\pi b\cdot\frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2a^2b.
\end{aligned}$$

(3) $z=a$ $(0\leqslant a\leqslant 1)$ での切り口 (内側) を $D(a)$ で表せば,

$$v(V) = \iiint_V dxdydz = \iiint_{\substack{(x,y)\in D(z)\\ 0\leqslant z\leqslant 1}} dxdydz = \int_0^1 dz\underbrace{\iint_{D(z)} dxdy}_{D(z)\text{ の面積}}.$$

ここで, 切り口 $D(z)$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 上で極座標 (r, θ) を用いれば,

$$\iint_{D(z)} dxdy = \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant z(1+\cos\theta) \\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi}} r\,drd\theta = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{z(1+\cos\theta)} r\,dr = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z^2(1+\cos\theta)^2}{2}\,d\theta$$

$$= z^2 \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = z^2 \int_0^{\pi} \Big(2\cos^2\frac{\theta}{2}\Big)^2 d\theta \overset{\varphi=\theta/2}{=} z^2 \int_0^{\pi/2} (2\cos^2\varphi)^2\,2\,d\varphi$$

$$= 8z^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi\,d\varphi = 8z^2 \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi z^2}{2}.$$

よって, $v(V) = \displaystyle\int_0^1 \frac{3\pi z^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

4. 平面の有界な閉領域 D で定義された C^1 級関数 $z = f(x, y)$ $((x, y) \in D)$ のグラフの面積 S は

$$S = \iint_D \sqrt{f_x(x,y)^2 + f_y(x,y)^2 + 1}\ dxdy$$

で与えられる (定理 5.4.2). この事実を用いて面積を計算しよう.

(1) 円柱 $y^2 + z^2 = a^2$ $(\Leftrightarrow\ z = \pm\sqrt{a^2 - y^2}\,)$ の円柱 $x^2 + y^2 = a^2$ の内部にある部分は, 2 つの関数

$$z = \pm\sqrt{a^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2 \leqslant a^2)$$

のグラフと見ることができ, その 2 枚のグラフは明らかに等面積である. $z = \sqrt{a^2 - y^2}$ のとき,

$$\sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1} = \sqrt{0^2 + \Big(-\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}\Big)^2 + 1} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

であるから, 求める面積 S は

$$S = 2\iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}\,dxdy = 2a\iint_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$= 2a\int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - y^2}} = 2a\int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2 - y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy = 2a \cdot 4a = 8a^2.$$

(2) 円柱 $y^2 + z^2 = a^2$ 上の点 (x, y, z) が球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ の内部にある条件は,

$$x^2 + (y^2 + z^2) = x^2 + a^2 \leqslant 2a^2, \quad \text{すなわち} \quad -a \leqslant x \leqslant a.$$

よって, 考えている図形は 2 つの関数

$$z = \pm\sqrt{a^2 - y^2} \quad (-a \leqslant x \leqslant a,\ -a \leqslant y \leqslant a)$$

のグラフである ($-a \leqslant y \leqslant a$ は根号の中が非負であるための条件). $z = \sqrt{a^2 - y^2}$ に対して, (1) と同じく $\sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ となるから, 求める面積 S は

$$S = 2\iint_{\substack{-a \leqslant x \leqslant a \\ -a \leqslant y \leqslant a}} \sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1}\,dxdy = 2\iint_{\substack{-a \leqslant x \leqslant a \\ -a \leqslant y \leqslant a}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dxdy$$

$$= 2a\Big(\int_{-a}^{a} dx\Big)\Big(\int_{-a}^{a} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}\Big) = 2a \cdot 2a\Big[\operatorname{Sin}^{-1}\frac{y}{a}\Big]_{-a}^{a} = 4\pi a^2. \quad \text{(教科書の解答は誤り?)}$$

(3) 曲面 $z = x^2 + y^2$ の平面 $z = a$ より下の部分は

$$z = x^2 + y^2 \quad (x^2 + y^2 \leqslant a)$$

と表される. $z = x^2 + y^2$ に対して,

$$\sqrt{{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1} = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{4(x^2 + y^2) + 1}$$

であるから, 求める面積 S は

$$S=\iint_{x^2+y^2\leqslant a}\sqrt{{z_x}^2+{z_y}^2+1}\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\leqslant a}\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dxdy$$

$$=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{a}\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}\sqrt{4r^2+1}\,r\,drd\theta=\left(\int_0^{\sqrt{a}}r\sqrt{4r^2+1}\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)$$

$$=2\pi\Big[\,\frac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\,\Big]_0^{\sqrt{a}}=\frac{\pi\{(4a+1)^{3/2}-1\}}{6}.$$

(4) 曲面 $z=xy$ の円柱 $x^2+y^2=a^2$ の内部にある部分は,

$$z=xy\quad(x^2+y^2\leqslant a^2)$$

と表される. $z=xy$ に対して, $\sqrt{{z_x}^2+{z_y}^2+1}=\sqrt{x^2+y^2+1}$ であるから, 求める面積 S は

$$S=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{{z_x}^2+{z_y}^2+1}\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{x^2+y^2+1}\,dxdy$$

$$=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant a\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}\sqrt{r^2+1}\,r\,drd\theta=\left(\int_0^{a}r\sqrt{r^2+1}\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)$$

$$=2\pi\Big[\,\frac{1}{3}(r^2+1)^{3/2}\,\Big]_0^{a}=\frac{2\pi\{(a^2+1)^{3/2}-1\}}{3}.$$

(5) 球面 $x^2+y^2+z^2=4$ ($\Leftrightarrow$ $z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}$) と回転放物面 $x^2+y^2=2z+1$ の交線は

$$x^2+y^2=4-z^2=2z+1,\quad \text{すなわち}\quad z=1,\ x^2+y^2=3$$

で与えられる. よって, 球面の回転放物面より上の部分は

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}\quad(x^2+y^2\leqslant 3)$$

と表される. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ に対して

$$\sqrt{{z_x}^2+{z_y}^2+1}=\sqrt{\Big(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\Big)^2+\Big(\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\Big)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

であるから, 求める面積 S は

$$S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 3}\sqrt{{z_x}^2+{z_y}^2+1}\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\leqslant 3}\frac{2\,dxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{3}\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}\frac{2r\,drd\theta}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$=\left(\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)=2\pi\Big[\,-2\sqrt{4-r^2}\,\Big]_0^{\sqrt{3}}=4\pi.$$

5. 定理 5.4.3 の公式 $S=2\pi\displaystyle\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ を用いて面積を計算する.

(1) $S=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=8\pi\int_0^{\pi/2}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx\overset{u=\cos x}{=}8\pi\int_1^0(-\sqrt{1+u^2}\,)\,du$

$$=8\pi\int_0^1\sqrt{u^2+1}\,du=8\pi\Big[\,\frac{1}{2}\big\{u\sqrt{u^2+1}+\log(u+\sqrt{u^2+1}\,)\big\}\,\Big]_0^1=4\pi\big\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2}\,)\big\}.$$

(2) $y=\dfrac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})=a\cosh\dfrac{x}{a}$ であるから, $1+\sinh^2\dfrac{x}{a}=\cosh^2\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{2}\Big(1+\cosh\dfrac{2x}{a}\Big)$ に注意して,

$$S=2\pi\int_{-a}^a a\cosh\frac{x}{a}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,dx=2\pi a\int_{-a}^a\cosh^2\frac{x}{a}\,dx=2\pi a\int_0^a\Big(1+\cosh\frac{2x}{a}\Big)\,dx$$

$$=2\pi a\Big[\,x+\frac{a}{2}\sinh\frac{2x}{a}\,\Big]_0^a=2\pi a\Big(a+\frac{a}{2}\sinh 2\Big)=\pi a^2(\sinh 2+2).$$

勿論, $\dfrac{\pi a^2}{2}(e^2-e^{-2}+4)$ と表してもよい.

(3) $y=(a^{2/3}-x^{2/3})^{3/2}$ $(-a\leqslant x\leqslant a)$ を x 軸のまわりに回転した図形を考えればよい. このとき,

$$1+\Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2=1+\Big\{\frac{3}{2}(a^{2/3}-x^{2/3})^{1/2}\Big(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\Big)\Big\}^2=1+(a^{2/3}-x^{2/3})\,x^{-2/3}=a^{2/3}x^{-2/3}$$

であるから, 求める曲面積は

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \sqrt{a^{2/3} x^{-2/3}}\, dx = 4\pi a^{1/3} \int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} x^{-1/3}\, dx$$

$$\overset{u=x^{2/3}}{=} 4\pi a^{1/3} \int_0^{a^{2/3}} (a^{2/3} - u)^{3/2}\, \frac{3}{2}\, du = 6\pi a^{1/3} \Big[-\frac{2}{5} (a^{2/3} - u)^{5/2} \Big]_0^{a^{2/3}} = \frac{12\pi a^2}{5}.$$

(4) 2 本の曲線 $y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ $(-a \leqslant x \leqslant a)$ を x 軸のまわりに回転した図形を考えればよい. このとき,

$$1 + \Big(\frac{dy}{dx}\Big)^2 = 1 + \Big(\frac{\mp x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\Big)^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

であるから, 求める曲面積は

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} (b + \sqrt{a^2 - x^2}\,) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx + 2\pi \int_{-a}^{a} (b - \sqrt{a^2 - x^2}\,) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi ab \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi ab \Big[\operatorname{Sin}^{-1} \frac{x}{a} \Big]_{-a}^{a} = 4\pi^2 ab.$$

【問題 5.5】

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha\theta\,\cos^\beta\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\Big(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\Big)$ $(\alpha,\beta>-1)$ を用いて計算する．

(1) $$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^6\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\Big(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{7}{2})}{2\,\Gamma(6)} = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{2\cdot 5!} = \frac{3\pi}{512}.$$

(2) $$\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos^7\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(3,4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{2\,\Gamma(7)} = \frac{2!\cdot 3!}{2\cdot 6!} = \frac{1}{120}.$$

(3) $$\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos^6\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B\Big(3,\frac{7}{2}\Big) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(\frac{7}{2})}{2\cdot\Gamma(\frac{13}{2})} = \frac{2\,\Gamma(\frac{7}{2})}{2\cdot\frac{11}{2}\frac{9}{2}\frac{7}{2}\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{8}{693}.$$

(4) $$\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta = B\Big(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})^2}{\Gamma(5)} = \frac{\{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\}^2}{4!} = \frac{3\pi}{128}.$$

2. (1) $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \overset{u=x^4}{=} \int_0^1 u^{1/4}(1-u)^{-1/2}\cdot\frac{1}{4}u^{-3/4}\,du = \frac{1}{4}\int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^{-1/2}\,du = \frac{1}{4}B\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big)$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{4\,\Gamma(1)} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{2-x}}\,dx \overset{u=x/2}{=} \int_0^1 \frac{2u}{\sqrt{2-2u}}\,2\,du = 2\sqrt{2}\int_0^1 u(1-u)^{-1/2}\,du = 2\sqrt{2}\,B\Big(2,\frac{1}{2}\Big)$$
$$= 2\sqrt{2}\,\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} = 2\sqrt{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

(3) $$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \overset{u=x^4}{=} \int_0^1 u^{5/4}(1-u)^{-1/2}\cdot\frac{1}{4}u^{-3/4}\,du = \frac{1}{4}\int_0^1 u^{1/2}(1-u)^{-1/2}\,du = \frac{1}{4}B\Big(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\Big)$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{4\,\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})^2}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

(4) $$\int_0^\infty e^{-x^2}x^7\,dx \overset{u=x^2}{=} \int_0^\infty e^{-u}u^{7/2}\,\frac{1}{2}u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}u^3\,du = \frac{1}{2}\Gamma(4) = \frac{3!}{2} = 3.$$

(5) $$\int_{-1}^1 (1-x^2)^5\,dx \overset{u=(x+1)/2}{=} \int_0^1 \{1^2-(2u-1)^2\}^5\,2\,du = 2\int_0^1 \{(2u)(2-2u)\}^5\,du$$
$$= 2^{11}\int_0^1 u^5(1-u)^5\,du = 2^{11}B(6,6) = 2^{11}\frac{\Gamma(6)^2}{\Gamma(12)} = \frac{2^{11}(5!)^2}{11!} = \frac{512}{693}.$$

(6) $$\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}x^3\,dx \overset{u=\sqrt{x}}{=} \int_0^\infty e^{-u}u^6\cdot 2u\,du = 2\int_0^\infty e^{-u}u^7\,du = 2\Gamma(8) = 2\cdot 7! = 10080.$$

3. (1) $u=x^5$ $(x>0)$ とおけば, $x=u^{1/5}$ より $dx=(1/5)u^{-4/5}\,du$. よって,
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^5}} = \int_0^1 \frac{(1/5)u^{-4/5}\,du}{\sqrt{1-u}} = \frac{1}{5}\int_0^1 u^{-4/5}(1-u)^{-1/2}\,du = \frac{1}{5}B\Big(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{1}{5})\Gamma(\frac{1}{2})}{5\,\Gamma(\frac{7}{10})}.$$

(2) $u=x^b$ $(x>0)$ とおけば, $x=u^{1/b}$ より $dx=(1/b)u^{1/b-1}\,du$. よって,
$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x^b)^3\,dx = \int_0^1 u^{(a-1)/b}(1-u)^3\cdot\frac{1}{b}u^{1/b-1}\,du = \frac{1}{b}\int_0^1 u^{a/b-1}(1-u)^3\,du = \frac{1}{b}B\Big(\frac{a}{b},4\Big)$$
$$= \frac{1}{b}\frac{\Gamma(\frac{a}{b})\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{a}{b}+4)} = \frac{6}{b}\,\frac{\Gamma(\frac{a}{b})}{(\frac{a}{b}+3)(\frac{a}{b}+2)(\frac{a}{b}+1)\frac{a}{b}\Gamma(\frac{a}{b})} = \frac{6b^3}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}.$$

(3) $u=\log(1/x)$ $(x>0)$ とおけば, $x=e^{-u}$ より $dx=-e^{-u}\,du$. よって,

$$\int_0^1 x^{a-1}\Big(\log\frac{1}{x}\Big)^{b-1}dx=\int_\infty^0 e^{-(a-1)u}u^{b-1}(-e^{-u})\,du=\int_0^\infty e^{-au}u^{b-1}\,du$$
$$\overset{v=au}{=}\int_0^\infty e^{-v}\Big(\frac{v}{a}\Big)^{b-1}\frac{dv}{a}=\frac{1}{a^b}\int_0^\infty e^{-v}v^{b-1}\,dv=\frac{\Gamma(b)}{a^b}.$$

(4) $u=\dfrac{1}{1+x}$ $(x>0)$ とおけば, $x=\dfrac{1}{u}-1=\dfrac{1-u}{u}$ より $dx=\dfrac{-du}{u^2}$. よって,

$$\int_0^\infty \frac{x^b}{(1+x)^{a+3}}\,dx=\int_1^0 u^{a+3}\Big(\frac{1-u}{u}\Big)^b\frac{-du}{u^2}=\int_0^1 u^{a-b+1}(1-u)^b du=B(a-b+2,b+1)$$
$$=\frac{\Gamma(a-b+2)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+3)}.$$

なお, これが積分可能であるためには, $a-b+2>0$ を仮定する必要がある.

4. (1) $u=\dfrac{1}{1+x^3}$ $(x>0)$ とおけば, $x=\Big(\dfrac{1}{u}-1\Big)^{1/3}=\Big(\dfrac{1-u}{u}\Big)^{1/3}$ より $dx=\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1-u}{u}\Big)^{-2/3}\dfrac{-du}{u^2}$. よって,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^3}=\int_1^0 u\cdot\frac{1}{3}\Big(\frac{1-u}{u}\Big)^{-2/3}\frac{-du}{u^2}=\frac{1}{3}\int_0^1 u^{-1/3}(1-u)^{-2/3}\,du=\frac{1}{3}B\Big(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\Big)$$
$$=\frac{1}{3}\Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin(\pi/3)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(2) $u=\dfrac{1}{1+x^4}$ $(x>0)$ とおけば, $x=\Big(\dfrac{1}{u}-1\Big)^{1/4}=\Big(\dfrac{1-u}{u}\Big)^{1/4}$ より $dx=\dfrac{1}{4}\Big(\dfrac{1-u}{u}\Big)^{-3/4}\dfrac{-du}{u^2}$. よって,

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^4}=\int_1^0 u\cdot\frac{1}{4}\Big(\frac{1-u}{u}\Big)^{-3/4}\frac{-du}{u^2}=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-1/4}(1-u)^{-3/4}\,du=\frac{1}{4}B\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\Big)$$
$$=\frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{1/2}(\cos\theta)^{-1/2}\,d\theta=\frac{1}{2}B\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

(4) $u=x^4$ $(u>0)$ とおけば, $x=u^{1/4}$ より $dx=\dfrac{1}{4}u^{-3/4}du$. よって,

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\int_0^1(1-u)^{-1/4}\cdot\frac{1}{4}u^{-3/4}du=\frac{1}{4}B\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{4}\Gamma\Big(\frac{3}{4}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}B\Big(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\Big),\ \int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}=\frac{1}{2}B\Big(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\Big)$ より,

$$\Big(\int_0^{\pi/2}\sqrt{\sin\theta}\,d\theta\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\Big)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})}=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})}$$
$$=\frac{\pi}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})}=\pi.$$

6. 被積分関数がともに非負の値をとるから, 定理 5.5.6 が適用できる.

(1) $D_L: 1\leqslant x\leqslant L,\ 1\leqslant y\leqslant L$ $(L>1)$ とする.

$$\iint_{D_L}\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy=\int_1^L dx\int_1^L\frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dy=\int_1^L dx\int_1^L\frac{x}{2}\frac{2y\,dy}{(x^2+y^2)^3}$$
$$=\int_1^L\frac{x}{2}\Big[-\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\Big]_{y=1}^{y=L}dx=\int_1^L\frac{x}{4}\Big\{-\frac{1}{(x^2+L^2)^2}+\frac{1}{(x^2+1)^2}\Big\}\,dx$$
$$=\int_1^L\frac{1}{8}\Big\{-\frac{2x}{(x^2+L^2)^2}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}\Big\}\,dx=\frac{1}{8}\Big[\frac{1}{x^2+L^2}-\frac{1}{x^2+1}\Big]_1^L$$
$$=\frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2L^2}-\frac{2}{L^2+1}+\frac{1}{2}\Big)\xrightarrow{L\to\infty}\frac{1}{16}.$$

(2) $D_R : x^2+y^2 \leqslant R^2$ $(R>0)$ とする．極座標変換を用いて，

$$\iint_{D_R} x^2 e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/4}} (r\cos\theta)^2 e^{-r^2}\,r\,drd\theta = \left(\int_0^R e^{-r^2} r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\right)$$

$$\overset{s=r^2}{=} \left(\int_0^{R^2} e^{-s} s\,\frac{ds}{2}\right)\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}\left\{1-(R^2+1)e^{-R^2}\right\} \xrightarrow{R\to\infty} \frac{\pi}{8}.$$