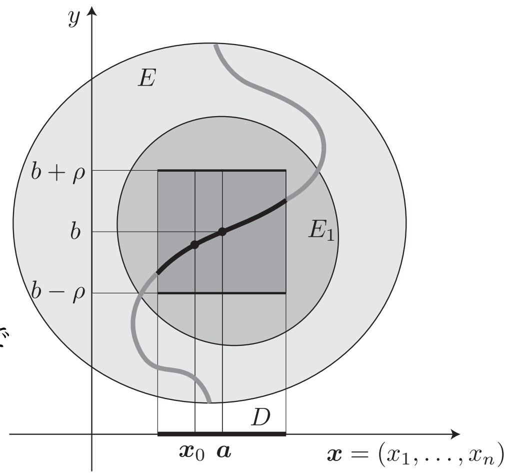
《資料 4》陰関数定理と逆写像定理

§1. 陰関数定理



定理 1 $\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}^1_y$ の開集合 E 上で定義された C^1 級関数 $f(\boldsymbol{x},y)$ が, $(\boldsymbol{a},b)\in E$ において,

$$f(\boldsymbol{a},b)=0 \quad \text{かつ} \quad f_y(\boldsymbol{a},b)\neq 0$$

を満たすとする. このとき, $(\boldsymbol{a},b)$ の近傍で $f(\boldsymbol{x},y)=0$ はある C^1 級関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ のグラフ $y=\varphi(\boldsymbol{x})$ として表される. 厳密に述べれば,

(1) $\boldsymbol{a}$ の開近傍 D を小さく選べば, D 上の連続関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ で

$$f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))=0 \ \ (\boldsymbol{x}\in D) \quad \text{かつ} \quad \varphi(\boldsymbol{a})=b$$

を満たすものが唯 1 つ存在する.

(2) $\varphi(\boldsymbol{x})$ は D 上で C^1 級で, その微分 $\varphi'=(\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n})$ は

$$\varphi'(\boldsymbol{x})=-\frac{f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))}{f_y(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))} \quad \left(\Leftrightarrow \ \varphi_{x_i}(\boldsymbol{x})=-\frac{f_{x_i}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))}{f_y(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))} \ (1\leqslant i\leqslant n)\right).$$

あるいは, $(\boldsymbol{a},b)$ の近傍で $f(\boldsymbol{x},y)=0$ により y を $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ の関数と見なして,

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{f_{x_i}(\boldsymbol{x},y)}{f_y(\boldsymbol{x},y)} \quad (1\leqslant i\leqslant n).$$

[証] $f_y(\boldsymbol{a},b)>0$ と仮定してよい. (もし $f_y(\boldsymbol{a},b)<0$ なら f の代わりに $-f$ を考えよ.)

存在 f_y が連続より, $(\boldsymbol{a},b)$ の開近傍 $E_1\subset E$ を十分小さく選び, E_1 上で $f_y(\boldsymbol{x},y)>0$ としてよい. これと $f(\boldsymbol{a},b)=0$ とから, $\rho>0$ を小さく取れば, $f(\boldsymbol{a},b-\rho)<0<f(\boldsymbol{a},b+\rho)$. よって, $\boldsymbol{a}$ の十分小さな開近傍 $D\subset\mathbb{R}^n$ 上で, $f(\boldsymbol{x},b-\rho)<0<f(\boldsymbol{x},b+\rho)$ が成り立つ. $D\times[b-\rho,b+\rho]\subset E_1$ と考えてよいから, 以上より, 各 $\boldsymbol{x}\in D$ に対して,

$$b-\rho<\varphi(\boldsymbol{x})<b+\rho, \qquad f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))=0$$

を満たす $\varphi(\boldsymbol{x})$ が唯 1 つ存在する. (すなわち, $D\times[b-\rho,b+\rho]$ では $f(\boldsymbol{x},y)=0 \ \Leftrightarrow \ y=\varphi(\boldsymbol{x})$.)

連続性 $\forall\boldsymbol{x}_0\in D$ における φ の連続性を示す. $0<\forall\varepsilon<\rho-|\varphi(\boldsymbol{x}_0)-b|$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon)<0=f(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))<f(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon).$$

f の連続性により, $\delta>0$ を十分小さく取れば, $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ を満たす $\forall\boldsymbol{x}\in D$ に対して,

$$f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon)<0=f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))<f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon).$$

このとき, $f(\boldsymbol{x},y)$ の y に関する単調増加性により,

$$\varphi(\boldsymbol{x}_0)-\varepsilon<\varphi(\boldsymbol{x})<\varphi(\boldsymbol{x}_0)+\varepsilon, \quad \text{すなわち} \quad |\varphi(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon.$$

C^1 級 $\forall\boldsymbol{x}_0\in D$ を固定し, $k(\boldsymbol{h})=\varphi(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)$ ($|\boldsymbol{h}|$ 十分小) とおけば,

$$\varphi(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})=\varphi(\boldsymbol{x}_0)+k(\boldsymbol{h}) \quad \text{かつ} \quad k(\boldsymbol{h})\to 0 \ \ (\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}).$$

$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h},\varphi(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}))=f(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))=0$ であるから,

$$\begin{aligned}0&=f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h},\varphi(\boldsymbol{x}_0)+k(\boldsymbol{h}))-f(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))\\&=(f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0)),f_y(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0)))\begin{pmatrix}\boldsymbol{h}\\k(\boldsymbol{h})\end{pmatrix}+o(|\boldsymbol{h}|)\\&=f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{h}+f_y(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))k(\boldsymbol{h})+o(|\boldsymbol{h}|)\quad(\boldsymbol{h}\to 0).\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\varphi(\boldsymbol{x}_0)=k(\boldsymbol{h})&=-\frac{f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{h}+o(|\boldsymbol{h}|)}{f_y(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))}\\&=-\frac{f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))}{f_y(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))}\boldsymbol{h}+o(|\boldsymbol{h}|)\quad(\boldsymbol{h}\to 0).\end{aligned}$$

これは $\varphi'(\boldsymbol{x}_0)=-\dfrac{f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))}{f_y(\boldsymbol{x}_0,\varphi(\boldsymbol{x}_0))}$ を示す. $\boldsymbol{x}_0\in D$ の任意性から, φ は D 上で微分可能で,

$$\varphi'(\boldsymbol{x})=-\frac{f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))}{f_y(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))}\quad(\boldsymbol{x}\in D).$$

上式の右辺は D 上で連続, 従って φ は D 上で C^1 級である. □

《注》 定理に現れる $y=\varphi(\boldsymbol{x})$ を, $f(\boldsymbol{x},y)=0$ が $(\boldsymbol{a},b)$ の周りで定める**陰関数**とよぶ. このとき, $f(\boldsymbol{x},y)$ が C^r 級 $(r\geqslant 1)$ であれば $\varphi(\boldsymbol{x})$ も C^r 級となる. $\varphi(\boldsymbol{x})$ の (高次の) 偏導関数は次のように計算できる.

(1) $f(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))=0$ を x_i について偏微分することにより,

$$f_{x_i}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))+f_y(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))\varphi_{x_i}(\boldsymbol{x})=0\quad(1\leqslant i\leqslant n).\qquad\therefore\ \varphi_{x_i}(\boldsymbol{x})=-\frac{f_{x_i}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))}{f_y(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))}.$$

(2) 更に x_j で偏微分すると, (例えば $f_{x_i}(\boldsymbol{x},\varphi(\boldsymbol{x}))$ を f_{x_i} というように略記した)

$$f_{x_ix_j}+f_{x_iy}\varphi_{x_j}+f_{x_jy}\varphi_{x_i}+f_{yy}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}+f_{yy}\varphi_{x_ix_j}=0\quad(1\leqslant i,j\leqslant n).$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \varphi_{x_ix_j}&=-\frac{f_{x_ix_j}+f_{x_iy}\varphi_{x_j}+f_{x_jy}\varphi_{x_i}+f_{yy}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}}{f_y}\\&=-\frac{f_{x_ix_j}(f_y)^2-(f_{x_iy}f_{x_j}+f_{x_jy}f_{x_i})f_y+f_{yy}f_{x_i}f_{x_j}}{(f_y)^3}.\end{aligned}$$

§2. 逆関数定理

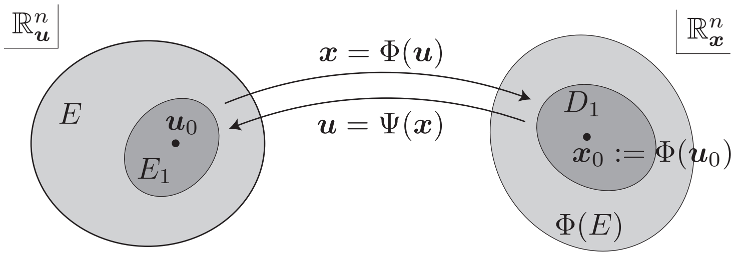
定理 2 E が $\mathbb{R}^n$ の開集合で, C^r 写像 $\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{u}) : E \to \mathbb{R}^n$ $(r \geqslant 1)$ が

$$\det \Phi'(\boldsymbol{u}_0) \neq 0 \qquad \left(\Leftrightarrow \left[\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(u_1, \ldots, u_n)} \right]_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0} \neq 0 \right)$$

を満たすならば, "$\boldsymbol{u}_0$ の近傍で Φ の C^r 級**逆写像**が存在する". すなわち, $\boldsymbol{u}_0$ の開近傍 $E_1 \subset E$ を十分小さく選べば, Φ は E_1 上で 1 対 1, $D_1 := \Phi(E_1)$ は $\boldsymbol{x}_0 := \Phi(\boldsymbol{u}_0)$ の開近傍であり, $\Phi|_{E_1} : E_1 \to D_1$ の逆写像 $\Psi = (\Phi|_{E_1})^{-1} : D_1 \to E_1$ が C^r 級となる. 更に,

$$\Psi'(\boldsymbol{x}) = \Phi'(\Psi(\boldsymbol{x}))^{-1} \ \ (\boldsymbol{x} \in D_1) \qquad \left(\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}^{-1} \right)$$

が成り立つ.



《注 1》 一般に, C^1 級写像 $\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{x})$ により, $\boldsymbol{u}$ 空間の $\boldsymbol{u}_0$ 付近の微小部分は $\boldsymbol{x}$ 空間の $\boldsymbol{x}_0 := \Phi(\boldsymbol{u}_0)$ 付近の微小部分に写されるが, その (n 次元) 体積の比は $|\det \Phi'(\boldsymbol{u}_0)|$ で近似される. 従って, 定理 2 の仮定は $\boldsymbol{u}_0$ の十分小さな近傍が写像 $\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{u})$ によって「ぺちゃんこにならない」ことを意味する.

《注 2》 $y = f(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x}$ の関数) は写像 $\boldsymbol{x} = \Phi(\boldsymbol{u})$ により $y = f(\Phi(\boldsymbol{u}))$ ($\boldsymbol{u}$ の関数) に変換される. このとき,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial u_n} \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}.$$

右辺に現れる Jacobi 行列が正則であれば, その逆行列を両辺に掛けることにより,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{\partial y}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial u_n} \right) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}^{-1}.$$

これは関係式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}^{-1}.$$

を意味する.

§3. 条件付き極値問題

$\boxed{\textbf{定理 3}}$ (Lagrange **の未定乗数法**)

$f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ が開集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上で C^1 級のとき, 条件 $g(\boldsymbol{x}) = 0$ の下で $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{a} \in E$ で極値をとるとする. このとき, $g'(\boldsymbol{a}) \neq \boldsymbol{0}$ ならば, $f'(\boldsymbol{a}) = \beta\, g'(\boldsymbol{a})$ を満たす β が存在する (特に, $f'(\boldsymbol{a}) \neq 0$ なら $f'(\boldsymbol{a}) \,/\!/\, g'(\boldsymbol{a})$ となる).

[証] $g_{x_n}(\boldsymbol{a}) \neq 0$ と仮定しても一般性を失わない. 以下,

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}, z) = (y_1, \ldots, y_{n-1}, z), \quad \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}, c) = (b_1, \ldots, b_{n-1}, c)$$

と表す. このとき, 陰関数定理により, $\boldsymbol{b}$ の開近傍 $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ および D 上の C^1 級関数 $\varphi(\boldsymbol{y})$ を,

$$g(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y})) = 0 \ (\boldsymbol{y} \in D) \ \text{ かつ } \ \varphi(\boldsymbol{b}) = c \quad (\text{すなわち, } \boldsymbol{a} \text{ の近傍で } g(\boldsymbol{x}) = 0 \ \Leftrightarrow \ z = \varphi(\boldsymbol{y}))$$

を満たすように取れる. 更に, その微分は

$$\varphi'(\boldsymbol{y}) = -\frac{g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))}{g_z(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))} \quad (\boldsymbol{y} \in D).$$

ここで, $h(\boldsymbol{y}) := f(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))$ ($f(\boldsymbol{y}, z)$ に条件 $g(\boldsymbol{y}, z) = 0$ を組み込んだ関数) とおけば,

$$h'(\boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y})) + f_z(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))\varphi'(\boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{y} \in D).$$

$h(\boldsymbol{y})$ は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ で極値をとるから,

$$\boldsymbol{0} = h'(\boldsymbol{b}) = f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{b}, c) + f_z(\boldsymbol{b}, c)\varphi'(\boldsymbol{b}) = f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{b}, c) - f_z(\boldsymbol{b}, c)\,\frac{g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{b}, c)}{g_z(\boldsymbol{b}, c)}.$$

従って, $\beta = \dfrac{f_z(\boldsymbol{b}, c)}{g_z(\boldsymbol{b}, c)}$ とおけば $\begin{cases} f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{b}, c) = \beta g_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{b}, c) \\ f_z(\boldsymbol{b}, c) = \beta g_z(\boldsymbol{b}, c) \end{cases}$ となり, 確かに $f'(\boldsymbol{a}) = \beta g'(\boldsymbol{a})$ が成り立つ. □

《注 1》 $(n{+}1)$ 変数関数 $F(\boldsymbol{x}, \lambda) := f(\boldsymbol{x}) - \lambda\, g(\boldsymbol{x})$ を導入すれば, 上の条件は, $g(\boldsymbol{a}) = 0$ も合わせて,

$$F'(\boldsymbol{a}, \beta) = \boldsymbol{0} \quad (\text{すなわち, } F_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}, \beta) = \boldsymbol{0}, \ -F_\lambda(\boldsymbol{a}, \beta) = g(\boldsymbol{a}) = 0)$$

と書ける. (従って, 条件付き極値問題は $F'(\boldsymbol{x}, \lambda) = \boldsymbol{0}$ を解くことから始めればよい.)

《注 2》 上の証明では $\boldsymbol{b}$ は $h(\boldsymbol{y})$ の停留点であるが, $\boldsymbol{b}$ で極値をとるかどうかを判定するには (一般的な状況では) $h''(\boldsymbol{b})$ まで計算する必要がある. 以下にその計算法を示す. まず, $g(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y})) = 0$ より,

$$\begin{aligned} &g_{y_i}(\boldsymbol{a}) + g_z(\boldsymbol{a})\varphi_{y_i}(\boldsymbol{b}) = 0, \\ &g_{y_iy_j}(\boldsymbol{a}) + g_{y_iz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_j}(\boldsymbol{b}) + g_{y_jz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_i}(\boldsymbol{b}) + g_{zz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_i}(\boldsymbol{b})\varphi_{y_j}(\boldsymbol{b}) + g_z(\boldsymbol{a})\varphi_{y_iy_j}(\boldsymbol{b}) = 0. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \varphi_{y_i}(\boldsymbol{b}) &= -\frac{g_{y_i}(\boldsymbol{a})}{g_z(\boldsymbol{a})}, \\ \varphi_{y_iy_j}(\boldsymbol{b}) &= -\frac{g_{y_iy_j}(\boldsymbol{a}) + g_{y_iz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_j}(\boldsymbol{b}) + g_{y_jz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_i}(\boldsymbol{b}) + g_{zz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_i}(\boldsymbol{b})\varphi_{y_j}(\boldsymbol{b})}{g_z(\boldsymbol{a})} \\ &= -\frac{g_{y_iy_j}(\boldsymbol{a})g_z(\boldsymbol{a})^2 - (g_{y_j}(\boldsymbol{a})g_{y_iz}(\boldsymbol{a}) + g_{y_i}(\boldsymbol{a})g_{y_jz}(\boldsymbol{a}))g_z(\boldsymbol{a}) + g_{y_i}(\boldsymbol{a})g_{y_j}(\boldsymbol{a})g_{zz}(\boldsymbol{a})}{g_z(\boldsymbol{a})^3}. \end{aligned}$$

次に, $h(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}, \varphi(\boldsymbol{y}))$ より,

$$h_{y_iy_j}(\boldsymbol{a}) = f_{y_iy_j}(\boldsymbol{a}) + f_{y_iz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_j}(\boldsymbol{b}) + f_{y_jz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_i}(\boldsymbol{b}) + f_{zz}(\boldsymbol{a})\varphi_{y_i}(\boldsymbol{b})\varphi_{y_j}(\boldsymbol{b}) + f_z(\boldsymbol{a})\varphi_{y_iy_j}(\boldsymbol{b}).$$

よって, $h''(\boldsymbol{b})$ は f, g の $\boldsymbol{a}$ における 2 次以下の偏微分係数で表される.