《資料 3》多変数関数の極値

$\mathbb{R}^n$ の領域 D で定義された n 変数関数 $f : D \to \mathbb{R}$ の極値について考える.

$\boxed{1}$ 準備 1 (多変数関数に対する Taylor の定理)

f が $\boldsymbol{a} \in D$ の近傍で C^N 級ならば, Taylor の定理 (漸近展開形):

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left((\boldsymbol{h} \bullet \nabla)^k f\right)(\boldsymbol{a}) + o(|\boldsymbol{h}|^N) \quad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$$

が成り立つ. ここで,

$$(\boldsymbol{h} \bullet \nabla)^k f = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k}, \quad \nabla := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix} \text{ (nabla)}.$$

この定理の $N = 1, 2$ の場合は次のように書ける.

補題 1　$\boldsymbol{a}$ の近傍で定義された関数 f に対して,

(i) f が $\boldsymbol{a}$ の近傍で C^1 級ならば, $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|)$ $(\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$.

(ii) f が $\boldsymbol{a}$ の近傍で C^2 級ならば, $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} \bullet \boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|^2)$ $(\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$.

ここで,

$$f'(\boldsymbol{a}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{a})), \qquad f''(\boldsymbol{a}) = \Big[f_{x_i x_j}(\boldsymbol{a}) \Big]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \text{ (Hesse 行列)}.$$

$\boxed{2}$ 準備 2 (対称行列と二次形式)

断らない限り, 行列・ベクトルの成分は "実数"であるとする.

定義　正方行列 A が $A^\mathsf{T} = A$ (A^T は A の転置行列) を満たすとき, A を**対称行列**と呼ぶ ($A\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \bullet A\boldsymbol{y}$ が成り立つことに注意). また, n 次対称行列 $A = \big[\, a_{ij} \,\big]$ に対して, **二次形式**

$$q_A(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^\mathsf{T} A \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \quad (\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n)$$

が定義される ("実数" を明示するために, 実対称行列, 実二次形式と呼ぶことも多い). このとき, 更に,

(i) A (or q_A) が **正定値** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $q_A(\boldsymbol{x}) > 0$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\})$.

(ii) A (or q_A) が **負定値** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $q_A(\boldsymbol{x}) < 0$ $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\})$.

(iii) A (or q_A) が **不定値** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $q_A(\boldsymbol{p}_1) > 0,\ q_A(\boldsymbol{p}_2) < 0$ となる $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in \mathbb{R}^n$ が存在.

補題 2　n 次対称行列 $A = \big[\, a_{ij} \,\big]$ に対して,

$$RAR^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \mu_n \end{bmatrix} \text{ (対角行列)} \tag{1}$$

となる正則行列 R が存在する (有理的手続きで構成できる). このとき, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ は R の選び方で変わるが,

$$r_+ := \#\{\, j \mid \mu_j > 0\}, \quad r_- := \#\{\, j \mid \mu_j < 0\}, \quad r_0 := \#\{\, j \mid \mu_j = 0\} \quad (\# \text{ は集合の元の個数を表す})$$

は R の選び方によらずに一意に定まる (ここまでの事実を Sylvester **の慣性法則**と呼ぶ). 更に,

(i) A が正定値 $\Leftrightarrow$ $r_+ = n$.　(ii) A が負定値 $\Leftrightarrow$ $r_- = n$.　(iii) A が不定値 $\Leftrightarrow$ $r_+ \cdot r_- \neq 0$.

$\boxed{3}$ 極値問題

補題 1, 2 を用いて, 多変数関数の極値問題に関する基本的な定理を証明する.

$\boxed{\textbf{定理 1}}$ f が $\boldsymbol{a} \in D$ の近傍で C^1 級のとき,

$$f \text{ が } \boldsymbol{a} \text{ で極値をとる} \quad \Rightarrow \quad f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{a} \text{ は } f \text{ の\textbf{停留点}}).$$

[証明] f が $\boldsymbol{a}$ で極値をとるなら, 各 i について $f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_i)$ も $t = 0$ で極値をとる. よって,

$$f_{x_i}(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{d}{dt} f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_i)\right)_{t=0} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

となるので, $f'(\boldsymbol{a}) = (f_{x_1}(\boldsymbol{a}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{a})) = \boldsymbol{0}$ が従う. □

$\boxed{\textbf{定理 2}}$ f が $\boldsymbol{a} \in D$ の近傍で C^2 級で, $\boldsymbol{a}$ が f の停留点であるとき,

(i) $f''(\boldsymbol{a})$ が正定値 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a}$ は f の極小点 (すなわち, f は $\boldsymbol{a}$ で極小値をとる).
(ii) $f''(\boldsymbol{a})$ が負定値 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a}$ は f の極大点 (すなわち, f は $\boldsymbol{a}$ で極大値をとる).
(iii) $f''(\boldsymbol{a})$ が不定値 $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a}$ は f の鞍点 (従って, f は $\boldsymbol{a}$ で極値をとらない).

ここで, $\boldsymbol{a}$ が f の**鞍点**とは, f がある方向で見れば $\boldsymbol{a}$ で極小だが, 別の方向で見れば極大になることをいう.

[証明] $\boldsymbol{a}$ が f の停留点であるから, 補題 1 (ii) により

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} \bullet \boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|^2) \qquad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}). \tag{2}$$

$f''(\boldsymbol{a})$ が正定値のとき $f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} \bullet \boldsymbol{h} \geqslant c\,|\boldsymbol{h}|^2$ $(\exists c > 0)$, $f''(\boldsymbol{a})$ が負定値のとき $f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} \bullet \boldsymbol{h} \leqslant -c\,|\boldsymbol{h}|^2$ $(\exists c > 0)$ となるから, (i), (ii) が成り立つことは明らか. 次に, $f''(\boldsymbol{a})$ に対して, $f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_1 \bullet \boldsymbol{h}_1 > 0$, $f''(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h}_2 \bullet \boldsymbol{h}_2 < 0$ なる $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2 \neq \boldsymbol{0}$ が存在するとき, (2) に $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{h}_1$, $t\boldsymbol{h}_2$ を代入して, $t \to 0$ での様子を見ることにより,

$$f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}_1) - f(\boldsymbol{a}) > 0, \quad f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{h}_2) - f(\boldsymbol{a}) < 0 \quad (0 < |t| \ll 1).$$

よって, f は $\boldsymbol{a}$ において, $\boldsymbol{h}_1$ 方向には極小だが, $\boldsymbol{h}_2$ 方向には極大となる. これで (iii) も示された. □

$f''(\boldsymbol{a})$ が正定値, 負定値, 不定値となる条件は補題 2 で与えられる. 特に, $n = 2$ の場合, その条件は簡単な形で表現される ($\boxed{4}$ 例 1 参照).

$\boxed{\textbf{定理 3}}$ $f(x, y)$ が C^2 級で, $(a, b) \in D$ が f の停留点であるとき,

(i) $\det f''(a, b) > 0,\ f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow f$ は (a, b) で極小値をとる.
(ii) $\det f''(a, b) > 0,\ f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow f$ は (a, b) で極大値をとる.
(iii) $\det f''(a, b) < 0 \Rightarrow f$ は (a, b) で極値は取らない. (もっと詳しく, (a, b) は f の鞍点.)

$\boxed{4}$ 対称行列に対する補足

ここでは, 補題 2 を証明し, 2 つの重要な例を挙げ, 最後に対称行列の直交行列による対角化にも言及する.

[補題 2 の証明] まず, n 次対称行列 A に対して, (1) の形を実現する正則行列 R が存在することを, n に関する数学的帰納法で示す. $n = 1$ のときは自明. $n \geqslant 2$ のとき, $n - 1$ 次対称行列に対して主張が正しいと仮定して, n 次対称行列でも主張が正しいことを示す. そのためには, 任意の n 次対称行列 A に対して,

$$R_0 A R_0^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & \boldsymbol{0}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{0} & A_1 \end{bmatrix} \quad (a_1 \in \mathbb{R},\ A_1 \text{ は } n - 1 \text{ 次対称行列}) \tag{3}$$

の形となる n 次正則行列 R_0 の存在を示せばよい．実際, A_1 は $n-1$ 次対称行列だから, 帰納法の仮定から,

$$R_1 A_1 R_1^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_2 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{bmatrix} \quad (a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R})$$

の形となる $n-1$ 次正則行列 R_1 が存在する．よって, $R = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & R_1 \end{bmatrix} R_0$ とおけば,

$$RAR^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & R_1 \end{bmatrix} R_0 A R_0^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & R_1^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & R_1^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & R_1 A_1 R_1^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{bmatrix}$$

となり, 証明が終わる．(3) を実現する R_0 の存在を示すために, $i \neq j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ に対し, 2 種類の行列

$$P_{ij} := (E_n \text{ の第 } i \text{ 行と第 } j \text{ 行を入れ換えた行列}),$$
$$P_{ij}(c) := (E_n \text{ の } (i,j) \text{ 成分の } 0 \text{ を } c \text{ で置き換えた行列})$$

を用意する．ここで, E_n は n 次単位行列, P_{ij} は (左から掛けたとき) 第 i 行と第 j 行を交換する基本行列, $P_{ij}(c)$ は第 i 行に第 j 行の c 倍を加える基本行列である．4 つの場合に分け, R_0 の存在が構成的に示される．

<u>*Case 1*</u>. $a_{11} \neq 0$ のとき, $R_0 = P_{n1}(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}) \cdots P_{21}(-\frac{a_{12}}{a_{11}})$ とおけば, $R_0 A R_0^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & {}^{\exists}A_1 \end{bmatrix}$.

<u>*Case 2*</u>. $a_{11} = 0$ かつ $a_{ii} \neq 0$ $(2 \leqslant {}^{\exists}i \leqslant n)$ のとき, $P_{1i} A P_{1i}^{\mathsf{T}}$ の $(1,1)$ 成分が a_{ii} となり, Case 1 に帰着.

<u>*Case 3*</u>. $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$ かつ $a_{i1} \neq 0$ $(2 \leqslant {}^{\exists}i \leqslant n)$ のとき, $P_{1i}(\frac{1}{2}) A P_{1i}(\frac{1}{2})^{\mathsf{T}}$ の $(1,1)$ 成分が a_{1i} となり, Case 1 に帰着.

<u>*Case 4*</u>. $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 0$ かつ $a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$ のとき, $R_0 = E$, $a_1 = 0$ として (3) が成立.

以上の議論から, (1) の形を実現する正則行列 R が有理的な手続きで構成されることが分かる (具体的には R は行基本変形の繰り返しを表す正則行列として得られる).

次に, 各 $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して, $\boldsymbol{x} = R^{\mathsf{T}} \boldsymbol{y}$ $(\Leftrightarrow \boldsymbol{y} = (y_i) = (R^{\mathsf{T}})^{-1} \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0})$ とおけば,

$$A\boldsymbol{x} \bullet \boldsymbol{x} = AR^{\mathsf{T}} \boldsymbol{y} \bullet R^{\mathsf{T}} \boldsymbol{y} = RAR^{\mathsf{T}} \boldsymbol{y} \bullet \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2.$$

これより, (i), (ii), (iii) が容易に示される.

最後に, r_+, r_-, r_0 の一意性を示す．(1) の各辺の左右からそれぞれ $P_{ij}, P_{ij}^{\mathsf{T}}$ (実は同じ行列) を掛ければ, 右辺において μ_i と μ_j が交換されるから (その際, r_+, r_-, r_0 は変わらないことに注意),

$$\mu_1, \ldots, \mu_{r_+} \text{ が正}, \quad \mu_{r_+ + 1}, \ldots, \mu_{r_+ + r_-} \text{ が負}, \quad \mu_{r_+ + r_- + 1} = \cdots = \mu_n = 0 \qquad (r_+ + r_- = n - r_0)$$

であると仮定して一般性を失わない．(1) の性質をもつ別の R' に対応する $\mu_1', \ldots, \mu_n'$ が

$$\mu_1', \ldots, \mu_{r_+'}' \text{ が正}, \quad \mu_{r_+' + 1}', \ldots, \mu_{r_+' + r_-'}' \text{ が負}, \quad \mu_{r_+' + r_-' + 1}' = \cdots = \mu_n' = 0 \qquad (r_+' + r_-' = n - r_0')$$

を満たすとする．ここで, $r_+ > r_+'$ であると仮定しよう (背理法でこれを否定する)．$R^{\mathsf{T}}, R'^{\mathsf{T}}$ の第 i 列を $\boldsymbol{p}_i$ $(= R^{\mathsf{T}} \boldsymbol{e}_i)$, $\boldsymbol{p}_i'$ $(= R'^{\mathsf{T}} \boldsymbol{e}_i)$ とし, $V = \langle \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{r_+} \rangle$, $W = \langle \boldsymbol{p}_{r_+'+1}', \ldots, \boldsymbol{p}_n' \rangle$ とおく．$\boldsymbol{q} \in V \cap W$ とすれば,

$$\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{r_+} c_i \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=r_+'+1}^{n} d_i \boldsymbol{p}_i' \quad \text{の形に書かれ,} \quad A\boldsymbol{q} \bullet \boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{r_+} \mu_i c_i^2 = \sum_{i=r_+'+1}^{r_+' + r_-'} \mu_i' d_i^2 \leqslant 0.$$

$\boldsymbol{q} \neq \mathbf{0}$ なら $\sum_{i=1}^{r_+} \mu_i c_i^2 > 0$ となってしまうので, $\boldsymbol{q} = \mathbf{0}$ でなければならない．よって, $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{r_+}$, $\boldsymbol{p}_{r_+'+1}', \ldots, \boldsymbol{p}_n'$ は $\mathbb{R}^n$ の 1 次独立なベクトルの組となるが, その個数が $r_+ + (n - r_+') = n + (r_+ - r_+') > n$ となり不合理．従って, $r_+ > r_+'$ が否定され, $r_+ \leqslant r_+'$ を得る．R と R' の役割を入れ替えて $r_+ \geqslant r_+'$ が得られ, $r_+ = r_+'$ が結論される．同様な議論により $r_- = r_-'$ も示され, r_+, r_-, r_0 の一意性が証明された． □

【問】 $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 4xy + 10yz + 6zx$ は極値をもつか？

(停留点 $(0,0,0)$ での Hesse 行列に対して上の手続きを実行すれば $r_+ = 2, r_- = 1$ が得られるはず.)

以下では, $RAR^{\mathsf{T}} = B$ なる正則行列 R が存在するとき $A \cong B$ と表すことにする.

《例 1》 対称行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \neq O$ に対する r_+, r_-, r_0 を計算する ($A = O$ は自明なので除く).

- $a_{11} \neq 0$ のとき, $A \cong \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{11}^{-1} a_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11}^{-1} \det A \end{bmatrix}$.
- $a_{22} \neq 0$ のとき, $A \cong \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{11} - a_{22}^{-1} a_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} \det A \end{bmatrix}$.
- $a_{11} = a_{22} = 0 \neq a_{12}$ のとき, $A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{12} \end{bmatrix}$.

よって, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ の符号に注目して,

- $\det A > 0$ のとき, $\begin{cases} a_{11} > 0 \ (\Leftrightarrow\ a_{22} > 0) \text{ ならば}, & n_+ = 2 \ (\text{正定値}), \\ a_{11} < 0 \ (\Leftrightarrow\ a_{22} < 0) \text{ ならば}, & n_- = 2 \ (\text{負定値}). \end{cases}$
- $\det A < 0$ のとき, $n_+ = n_- = 1$ (不定値).
- $\det A = 0$ のとき, $\begin{cases} a_{11} > 0 \text{ or } a_{22} > 0 \text{ ならば}, & n_+ = n_0 = 1, \\ a_{11} < 0 \text{ or } a_{22} < 0 \text{ ならば}, & n_- = n_0 = 1. \end{cases}$

《例 2》 対称行列 $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ ($a_{ij} = a_{ji}$ に注意) に対して, $A_k = \left[a_{ij}\right]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant k}}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ とおくとき,

(i) A が正定値 $\Leftrightarrow$ $\det A_k > 0$ $(1 \leqslant \forall k \leqslant n)$, (ii) A が負定値 $\Leftrightarrow$ $(-1)^k \det A_k > 0$ $(1 \leqslant \forall k \leqslant n)$

が成り立つ. 実際, A が正定値のとき, $\boldsymbol{x}^{(k)} = [x_i]_{1 \leqslant i \leqslant k} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ に対して, $\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ とおけば, $A\widetilde{\boldsymbol{x}}^{(k)} \bullet \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(k)} = A_k \boldsymbol{x}^{(k)} \bullet \boldsymbol{x}^{(k)} > 0$ より A_k も正定値となり, $\det A_k > 0$ $(1 \leqslant \forall k \leqslant n)$ が従う (A が正定値のとき (1) の両辺の行列式をとってみよ). 逆に, $\det A_k > 0$ $(1 \leqslant \forall k \leqslant n)$ のとき,

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{a}'_n \\ \boldsymbol{a}'^{\mathsf{T}}_n & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} E_{n-1} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{a}'^{\mathsf{T}}_n A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \text{ と書いて,} \quad R_1 A R_1^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & a_{nn} - A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a}'_n \bullet \boldsymbol{a}'_n \end{bmatrix}$$

であるから, 両辺の行列式をとり, $\det A = \det A_{n-1} \cdot (a_{nn} - A_{n-1}^{-1} \boldsymbol{a}'_n \bullet \boldsymbol{a}'_n)$. これより,

$$A \cong R_1 A R_1^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & \det A / \det A_{n-1} \end{bmatrix} \cong \cdots \cong \begin{bmatrix} \det A_1 & & & O \\ & \det A_2 / \det A_1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \det A_n / \det A_{n-1} \end{bmatrix}$$

となり $r_+ = n$. 従って, A は正定値である. (ii) は「A が負定値」と「$-A$ が正定値」の同値性による.

定義 複素正方行列 A に対して, (複素行列が現れるのはこの定義だけ)

(i) $A\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p}$ $(\Leftrightarrow (\lambda E - A)\boldsymbol{p} = \mathbf{0})$ を満たすスカラー $\lambda \in \mathbb{C}$ およびベクトル $\boldsymbol{p} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ が存在するとき, λ を A の**固有値**, $\boldsymbol{p}$ を A の (固有値 λ に対応する) **固有ベクトル**と呼ぶ.

(ii) 多項式 $\varphi_A(\lambda) := \det(\lambda E - A)$ を A の**固有多項式**, 方程式 $\varphi_A(\lambda) = 0$ を A の**固有方程式**と呼ぶ.

命題 1 A が n 次対称行列のとき, $\varphi_A(\lambda) = 0$ の解 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($= A$ の固有値) はすべて実数で,

$$Q^{\mathsf{T}} A Q = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

を満たす**直交行列** Q (すなわち, $Q^{\mathsf{T}} Q = E$ を満たす行列 Q) が存在する.

命題 2 n 次対称行列 A に対して,

(i) A が正定値 $\Leftrightarrow$ A のすべての固有値が正 $\Leftrightarrow$ $r_+ = n$.

(ii) A が負定値 $\Leftrightarrow$ A のすべての固有値が負 $\Leftrightarrow$ $r_- = n$.

(iii) A が不定値 $\Leftrightarrow$ A が正負の固有値をもつ $\Leftrightarrow$ $r_+ \cdot r_- \neq 0$.

【注1】A の固有値が求まるなら命題 1, 2 の方が簡潔だが, r_+, r_-, r_0 を求めることが目的なら補題 2 の方が簡単で確実.

【注2】(1) の RAR^{T} の R は A への行基本変形 (複数回) を表し, (4) の $Q^{\mathsf{T}}AQ$ の Q は A の固有ベクトルを並べて作られる.