《資料 2》 多変数関数の微分

$\boxed{0}$ 1 変数関数の微分

1 変数関数 $f : I\ (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ の $a \in I$ における微分可能性は次の 2 通り (同値) に表現された.

① $f'(a) := \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在

② $f(a+h) = f(a) + Ah + o(h)\ \ (h \to 0)$ となる定数 A が存在 $\ (\Rightarrow\ A = f'(a))$

実際, ① $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + o(1) \ \Leftrightarrow\ f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h) \ \Leftrightarrow$ ②.

$\boxed{1}$ 方向微分と偏微分

定義 1 n 変数関数 $f : D\ (\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, ベクトル $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (通常は $|\boldsymbol{\nu}| = 1$) および $\boldsymbol{a} \in D$ に対して,

- $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{a}$ において $\boldsymbol{\nu}$ **方向に微分可能**

  $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \dfrac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{\nu}) - f(\boldsymbol{a})}{t}$ ($\boldsymbol{\nu}$ 方向の微分係数) が存在
- $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{a}$ において x_i **に関して偏微分可能**

  $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) := \lim_{t \to 0} \dfrac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{a})}{t}$ (x_i に関する偏微分係数) が存在
- $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{a}$ において**偏微分可能** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\boldsymbol{a}$ において $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関して偏微分可能

注意 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}_i}(\boldsymbol{a})$ であることに注意. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$ は $f_{x_i}(\boldsymbol{a})$ とも書かれる. D 上の各点で x_i に関して偏微分可能なとき, x_i に関する**偏導関数** $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\ (= f_{x_i}) : D \to \mathbb{R}$ が定義される.

$\boxed{2}$ 微分可能性 —— 多変数関数の 1 次近似

定義 2 n 変数関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in D$ に対して,

- f が $\boldsymbol{a}$ において **微分可能** (あるいは **全微分可能**)

  $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|)\ \ (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{A}$ が存在 (1)

  ($\boldsymbol{A}$ が行ベクトル, $\boldsymbol{h}$ が列ベクトル, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}$ は行列としての積 (実は内積) と見るのが自然)

命題 1 f が $\boldsymbol{a}$ において微分可能ならば, 偏微分可能 (実はすべての方向に微分可能) であって,

$$\boldsymbol{A} = f'(\boldsymbol{a}) := (f_{x_1}(\boldsymbol{a}),\ f_{x_2}(\boldsymbol{a}),\ \ldots,\ f_{x_n}(\boldsymbol{a}))$$

が成り立つ. 従って,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) &= f(\boldsymbol{a}) + f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|) \qquad (2) \\ &= \underbrace{f(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\boldsymbol{a}) h_j}_{\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}\ \text{の近傍での 1 次近似}} + o(|\boldsymbol{h}|) \quad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}). \end{aligned}$$

[証明] (1) に $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{e}_i$ を代入して, $f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{a}) = A_i t + o(|t|)\ \ (t \to 0)$. この両辺を t で割り, $t \to 0$ での極限をとれば, $A_i = f_{x_i}(\boldsymbol{a})$ を得る. □

注意 (1) に $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{\nu}$ を代入し, 上の証明と同様な議論を行えば, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\nu} = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\nu}$ が得られる.

以下では, ベクトル値関数の意味で「写像」という言葉を用いる.

命題 2　関数の場合と同様に, 写像 $\boldsymbol{F} = (f_i) : D \to \mathbb{R}^m$ (列ベクトル) および $\boldsymbol{a} \in D$ に対して,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) + A\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|) \quad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$$

を満たす行列 A が存在するならば, $\boldsymbol{F}$ は $\boldsymbol{a}$ で微分可能であるという. このとき,

$$A = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a}) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{\substack{i=1\downarrow m\\ j=1\to n}}$$

が成り立つ. 従って,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|) \quad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}). \tag{3}$$

[証明]　各成分 $f_i : D \to \mathbb{R}$ に (2) を適用して,

$$f_i(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f_i(\boldsymbol{a}) + f_i'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|) \ = f_i(\boldsymbol{a}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})h_j + o(|\boldsymbol{h}|) \ \ (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}).$$

$$\therefore \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} + o(|\boldsymbol{h}|). \qquad \square$$

注意　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ に対して,

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

を $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ の**微分**あるいは ($\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{x}$ に関する) **Jacobi 行列** と呼ぶ. 特に, $m = n$ のとき, Jacobi 行列の行列式 $\det \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})$ を $\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$ と表し, ($\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{x}$ に関する) **Jacobian** (= **Jacobi 行列式**) と呼ぶ.

3　合成関数の微分

命題 3　微分可能な関数 $f : D\,(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ および微分可能な写像 $\boldsymbol{\Phi} = (\varphi_i) : I\,(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{\Phi}(I) \subset D$ ならば, 合成関数 $f \circ \boldsymbol{\Phi} : I \to \mathbb{R}^n$ も微分可能であって,

$$(f \circ \boldsymbol{\Phi})'(t) = f'(\boldsymbol{\Phi}(t))\boldsymbol{\Phi}'(t) \quad (t \in I). \tag{4}$$

また, $y = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)$ として (4) を変数だけの関係で表せば,

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} \qquad \text{あるいは} \qquad \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}.$$

[証明]　$t_0 \in I$ を任意に固定し, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\Phi}(t_0) \in D$ とおく. このとき, $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ の微分可能性により,

- $\boldsymbol{\Phi}(t_0+h) - \boldsymbol{\Phi}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}'(t_0)h + \boldsymbol{p}(h)h$, $\ \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{0}$ を満たす連続関数 $\boldsymbol{p}(h)$ が ($h = 0$ の近傍で) 存在し,
- $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{k} + q(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k}|$, $\ q(\boldsymbol{0}) = 0$ を満たす連続関数 $q(\boldsymbol{k})$ が ($\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}$ の近傍で) 存在する
  (これらの事実については p.3 下の [Landau の記号に関する注意] 参照).

ここで, $\boldsymbol{k}(h) = \boldsymbol{\Phi}(t_0+h) - \boldsymbol{\Phi}(t_0)$ とおけば,

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0+h) = \boldsymbol{\Phi}(t_0) + \boldsymbol{k}(h) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{k}(h), \qquad \boldsymbol{k}(h) = \boldsymbol{\Phi}'(t_0)h + \boldsymbol{p}(h)h \to 0 \quad (h \to 0)$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\Phi}(t_0+h)) - f(\boldsymbol{\Phi}(t_0)) &= f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{k}(h)) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{k}(h) + q(\boldsymbol{k}(h))|\boldsymbol{k}(h)| \\ &= f'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{\Phi}'(t_0)h + \boldsymbol{p}(h)h) + q(\boldsymbol{k}(h))|\boldsymbol{\Phi}'(t_0)h + \boldsymbol{p}(h)h| \\ &= f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\Phi}'(t_0)h + \{f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{p}(h) + q(\boldsymbol{k}(h))|\boldsymbol{\Phi}'(t_0) + \boldsymbol{p}(h)| \cdot \operatorname{sgn} h\}\, h \\ &= f'(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\Phi}'(t_0)h + o(h) \qquad (h \to 0). \end{aligned}$$

最後から 2 番目の式で $\operatorname{sgn} h$ は h の符号を表し, 最後の等号は次の計算による:

$$|\{\dots\}| \leqslant |f'(\boldsymbol{a})||\boldsymbol{p}(h)| + |q(\boldsymbol{k}(h))||\boldsymbol{\Phi}'(t_0) + \boldsymbol{p}(h)| \xrightarrow{h\to 0} |f'(\boldsymbol{a})||\boldsymbol{p}(0)| + |q(0)||\boldsymbol{\Phi}'(t_0) + \boldsymbol{p}(0)| = 0. \qquad \square$$

命題 4　微分可能な関数 $f : D\,(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ および微分可能な写像 $\boldsymbol{\Phi} = (\varphi_i) : E\,(\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{\Phi}(E) \subset D$ ならば, 合成関数 $f \circ \boldsymbol{\Phi} : E \to \mathbb{R}$ も微分可能であって,

$$(f \circ \boldsymbol{\Phi})'(\boldsymbol{u}) = f'(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{u}) \quad (\boldsymbol{u} \in E). \tag{5}$$

また, $y = f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ として (5) を変数だけの関係で表せば,

$$\frac{\partial y}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \quad (1 \leqslant j \leqslant m),$$

$$\text{あるいは}\quad \left(\frac{\partial y}{\partial u_1},\ \dots,\ \frac{\partial y}{\partial u_m}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial y}{\partial x_n}\right)\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}}^{\boldsymbol{x}\text{ の }\boldsymbol{u}\text{ に関する Jacobi 行列}}.$$

命題 5　微分可能な写像 $\boldsymbol{F} = (f_k) : D\,(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^\ell$ および微分可能な写像 $\boldsymbol{\Phi} = (\varphi_i) : E\,(\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{\Phi}(E) \subset D$ ならば, 合成写像 $\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi} : E \to \mathbb{R}^\ell$ も微分可能であって,

$$(\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{\Phi})'(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{u}) \quad (\boldsymbol{u} \in E). \tag{6}$$

また, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ として (6) を変数だけの関係で表せば,

$$\frac{\partial y_k}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \quad (1 \leqslant k \leqslant \ell,\ 1 \leqslant j \leqslant m),$$

$$\text{あるいは}\quad \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_\ell}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_\ell}{\partial u_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_\ell}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_\ell}{\partial x_n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Landau の記号に関する注意

$\boldsymbol{n = 1}$ の場合　$\varphi(t)$ が開区間 I で連続で, $t_0 \in I$ で微分可能ならば

$$\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)h + o(h) \qquad (h \to 0)$$

と書ける. このとき,

$$p(h) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h} - \varphi'(t_0) & \text{if } h \neq 0 \text{ (かつ } t_0 + h \in I), \\ 0 & \text{if } h = 0 \end{cases}$$

と定めれば, $p(h)$ は $h = 0$ の近傍で連続 ($h = 0$ での連続性は $o(h)$ の定義による) であり,

$$\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)h + p(h)h$$

が成り立つ. この事実はベクトル値関数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ についても同様: $\boldsymbol{\Phi}(t_0 + h) - \boldsymbol{\Phi}(t_0) = \boldsymbol{\Phi}'(t_0)h + \boldsymbol{p}(h)h$.

$\boldsymbol{n \geqslant 2}$ の場合　$f(\boldsymbol{x})$ が領域 $D\,(\subset \mathbb{R}^n)$ で連続で, $\boldsymbol{x}_0 \in D$ で微分可能ならば

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + o(|\boldsymbol{h}|) \qquad (\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0})$$

と書ける. このとき,

$$q(\boldsymbol{h}) = \begin{cases} \dfrac{f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}}{|\boldsymbol{h}|} & \text{if } \boldsymbol{h} \neq \boldsymbol{0} \text{ (かつ } \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h} \in D), \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{h} = \boldsymbol{0} \end{cases}$$

と定めれば, $q(\boldsymbol{h})$ は $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ の近傍で連続 ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$ での連続性は $o(|\boldsymbol{h}|)$ の定義による) であり,

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} + q(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

が成り立つ.

合成関数の微分の例

◆ $\ell=1,\ n=2,\ m=1$ の場合

$z=f(x,y)$ と $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ の合成関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ に対して,

$$\frac{dz}{dt}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \varphi'(t) \\ \psi'(t) \end{bmatrix},\quad \text{あるいは}\quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

◆ $\ell=1,\ n=m=2$ の場合 (平面の極座標)

$z=f(x,y)$ と $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ の合成関数 $z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ に対して,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r},\ \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix},$$

$$\text{あるいは,}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

実は, 次の計算も許される:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial r},\ \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1}=\left(\frac{\partial z}{\partial r},\ \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix},$$

$$\text{あるいは,}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x}=\cos\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial y}=\sin\theta\,\dfrac{\partial z}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}. \end{cases}$$

◆ $\ell=1,\ n=m=3$ の場合 (空間の極座標)

$w=f(x,y,z)$ と $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ の合成関数 $w=f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$ に対して,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r},\ \frac{\partial w}{\partial \theta},\ \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix},$$

ここで, (x,y,z) の (r,θ,φ) に関する Jacobi 行列は

$$J=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{bmatrix}$$

で与えられる. 実は, 上式右辺の第 1 の行列 (J_0 とする) の 3 つの列は, 互いに直交し, 大きさ 1 で, この順に右手系をなすので, 容易に ${}^tJ_0\,J_0=E$, $\det J_0=1$ が得られる. 更に, この事実から, (x,y,z) の (r,θ,φ) に関する Jacobian が $\det J=r^2\sin\theta$ となり, J の逆行列が次のように計算できる ($J_0^{-1}={}^tJ_0$ に注意):

$$J^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r\sin\theta} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\frac{\sin\theta}{r} \\ -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix}.$$