微分積分学第二 $\boxed{\textbf{課題 2}}$ (提出：2 月 7 日)

$\boxed{0}$ 教科書の次の問題を解け. (提出の必要はない. 解答例を公開中.)
◎問題 5.1　1–3.　◎問題 5.2　1–4.　◎問題 5.3　1–4.　◎問題 5.4　1, 3–5.　○問題 5.5　1, 2, 4, 6.

$\boxed{1}$ 関数 $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) のグラフ Γ と xy 平面 $z=0$ で囲まれる部分を E とする (E は半径 1 の円を底面とする高さ 1 の円錐). また, $x^2+y^2=x$ で表される (z 軸方向に無限に延びる) 円柱面を P とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) 立体 E のうちで円柱面 P の内側にある部分の体積を求めよ. (p.128 例題 5.4.2 参照)

(2) 曲面 Γ のうちで円柱面 P の内側にある部分の面積を求めよ. (p.132 例題 5.4.4 参照)

(3) 立体 E と円柱面 P の共通部分として得られる曲面の面積を求めよ.

(4) 関数 $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ を関数 $z = 1 - (x^2+y^2)$ で置き換えたとき, (1), (3) に対応する問題に答えよ.

$\boxed{2}$ 区間 $[a,b]$ 上で定義された C^1 級関数 $y = f(x)$ ($\geqslant 0$ と仮定) に対して,

$$C = \{(x, f(x)) \mid a \leqslant x \leqslant b\}, \quad D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

とおく. このとき, 以下の問いに答えよ. 但し, a, b は $0 \leqslant a < b$ を満たす定数とする.

(1) D を y 軸の周りに回転してできる立体 E の体積は $2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$ であることを示せ.

(2) C を y 軸の周りに回転してできる曲面 S の面積は $2\pi \int_a^b x\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx$ であることを示せ.

(1), (2) のヒント： y 軸を z 軸とみなしたとき, C を z 軸の周りに回転してできる曲面をグラフとする 2 変数関数 $z = g(x,y)$ ($a \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant b$) を $f(\cdot)$ を用いて表してみよ.

(3) 曲線 $\begin{cases} x = \theta + \sin\theta \\ y = 1 + \cos\theta \end{cases}$ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) の定める関数を $y = f(x)$ ($0 \leqslant x \leqslant \pi$) とするとき, 立体 E の体積, および曲面 S の面積を求めよ. (この曲線は通常の cycloid を x 軸方向に $-\pi$ だけ平行移動して得られる.)

$\boxed{3}$ 次で与えられる立体 E の体積を計算せよ.

(1) 直線 $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = z$ を z 軸の周りに 1 回転して得られる曲面 (一葉双曲面) を S とし, S と 2 平面 $z = \pm 1$ とで囲まれる部分を E とする. (ヒント: 曲面 S の平面 $z = k$ による切り口 (円) を考えよ.)

(2) 3 本の無限に延びる円柱 $x^2+y^2 \leqslant 1$, $y^2+z^2 \leqslant 1$, $z^2+x^2 \leqslant 1$ の共通部分を E とする. (ヒント: $f(x,y) = \min\{\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2}\}$ とおけば, E は $-f(x,y) \leqslant z \leqslant f(x,y)$, $x^2+y^2 \leqslant 1$ と表される. 言い換えれば, $x^2+y^2 \leqslant 1$ 上で定義された 2 つの関数 $z = \pm f(x,y)$ のグラフで挟まれた部分が E である.)

$\boxed{4}$ xy 平面上の直線 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (a, b は正定数) と x 軸, y 軸とで囲まれる平面領域を D とする.

(1) D (面密度 1 とする) の重心 (x_D, y_D) を求めよ. 但し, 一般に, D の面密度が $\rho(x,y)$ のとき, D の重心 (x_D, y_D) は $x_D = \dfrac{\iint_D x\,\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$, $y_D = \dfrac{\iint_D y\,\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy}$ で与えられる.

(2) (xy 平面) $\subset$ (xyz 空間) と考えるとき, D を x 軸の周りに 1 回転してできる立体 E (密度 1 の物体) の, x 軸の周りの慣性モーメント I を求めよ. 但し, 一般に, 立体 E の密度が $\rho(x,y,z)$ のとき, E の直線 L の周りの慣性モーメント I は, $(x,y,z) \in E$ から L に下ろした垂線の長さを $d(x,y,z)$ として, $I = \iiint_E \rho(x,y,z)\,d(x,y,z)^2\,dxdydz$ で与えられる.

(3) 上の直線を $\boxed{2}$ (3) で与えた曲線に置き換えて D を定め, この D に対して上の (1), (2) に答えよ.

- 期限に提出することを重視します. 但し, 解答数が余りにも少ない場合は減点の対象とします.
- 友達と相談しても構いませんが, 最終的に自分で納得し, 自分の言葉で解答して下さい. 酷似した表現, 全く同じ誤答など, 丸写しに近いレポートが発見された場合は減点することがあります.
- レポートの返却はしませんが, 代わりに解答例を配布します. (期末試験の準備に役立てて下さい.)