微分積分学第二 $\boxed{\text{課題 1}}$

(提出日：4.4 を終えた次の週)

$\boxed{0}$ 教科書の次の問題は解けるようにしておくこと．(提出の必要はない．解答後, 解答例を見て確認せよ．勿論, それ以外の問題も解けた方がよいことは言うまでもない.)

問題 **4.1**: 4　問題 **4.2**: 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11　問題 **4.3**: 1, 2, 5, 6, 7　問題 **4.4**: 2, 3, 4, 5, 6, 7

$\boxed{1}$ 関数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$ について次の問いに答えよ．

(1) 直線 $L_\theta : x = t\cos\theta,\ y = t\sin\theta\ (t\in\mathbb{R})$ 上で $(x,y)\to(0,0)$ としたときの f の極限値が (θ に依らずに) 0 となること, すなわち $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in L_\theta}} f(x,y) = 0$ を確かめよ．

(2) f は $(0,0)$ において連続でないことを説明せよ．

(3) f の $(0,0)$ における $\boldsymbol{\nu}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}_\theta}(0,0)$ を計算せよ．

$\boxed{2}$ 関数 $f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ は $\mathbb{R}^2$ 上で微分可能であるが ($(0,0)$ での微分可能性のみが問題となる), f_x, f_y は $(0,0)$ で連続でないことを示せ．

$\boxed{3}$ 関数 $f(x,y)$ が領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ で偏微分可能であり, 点 $(a,b)\in D$ において f_x, f_y が連続であると仮定する．$|h|,|k|\neq 0$ が十分小さいとき,

$$F(t) := f(a+th, b) + f(a+h, b+tk)$$

が $f(a+h,b+k) - f(a,b) = F(1) - F(0)$ を満たすことを確認し, $F(t)$ に平均値の定理を適用して,

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = f_x(a+\theta h, b)h + f_y(a+h, b+\theta k)k$$

となる $\theta\in(0,1)$ (h,k に依存) が存在することを示せ．更に, f が点 (a,b) で微分可能であることを説明せよ．

$\boxed{4}$ 関数 $z = f(x,y)$ および $y = \phi(x)$ はともに十分に滑らかであるとする．

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x,\phi(x))$ と $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\phi(x))\ \big(= f_x(x,\phi(x))\big)$ の違いを説明せよ．

(2) $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$ と $\left(x^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)$ の違いを説明せよ．

$\boxed{5}$ $\boldsymbol{x}$ が $\mathbb{R}^n$ の変数であるとき, 次を示せ．

(1) 関数 $u(t,\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}$ $(t>0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n)$ は熱方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ (Δ は $\boldsymbol{x}$ に関する Laplace 作用素) を満たすことを示せ．($n=1$, $\boldsymbol{x}=x$ として解答してもよい.)

(2) 質量 m の質点がポテンシャル $V(\boldsymbol{x})$ による力を受けるとき, その運動は Newton の運動方程式 $m\boldsymbol{x}''(t) = -\nabla V(\boldsymbol{x}(t))$ $\Big($ すなわち $m\dfrac{d^2x_i}{dt^2} = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ $(1\leqslant i\leqslant n)\Big)$ に支配される．このとき, この質点のもつエネルギー $E(t) = \dfrac{1}{2}m|\boldsymbol{x}'(t)|^2 + V(\boldsymbol{x}(t))$ は時間に関して保存される (すなわち $E'(t)\equiv 0$ である) ことを示せ．($n=2$, $\boldsymbol{x}=(x,y)$ として解答してもよい.)

6 次の関数が調和関数であることを示せ.

(1) $z = \log \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y) \neq (0,0))$.　　(2) $w = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $((x,y,z) \neq (0,0,0))$.

7 (x,y) の C^1 級関数 $z = f(x,y)$ を極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により (r,θ) の C^1 級関数と見なす. (但し, $f(x,y)$ は (x,y) と (r,θ) が 1 対 1 に対応するような領域で定義されているとする.)

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を用いて表せ.

8 関数 $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ の極値を求めよ.

9 関数 $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$ は, $(0,0)$ を通る任意の直線上で考えたとき, $(0,0)$ で極小になることを示せ ($\boxed{1}$ の L_θ を用いるとよい). しかし, f は (2 変数関数としては) $(0,0)$ で極小にならないことを説明せよ. (ヒント : $f(x,y) < 0$ となる (x,y) の範囲を考えてみよ.)

10 C^1 級関数 $f(x,y)$ の等位線 $f(x,y) = c$ 上の点 (a,b) において, $f'(a,b) \neq (0,0)$ ならば, $\nabla f(a,b)$ は等位線 $f(x,y) = c$ の (a,b) における法線ベクトルであることを示せ.

11 曲線 $x^2y + y^3 - 3y + 1 = 0$ が点 $(1,1)$ の近傍で定める陰関数を $y = \phi(x)$ とする.

(1) 曲線 $y = \phi(x)$ の点 $(1,1)$ における接線と法線の方程式を求めよ.

(2) 曲線 $y = \phi(x)$ の点 $(1,1)$ における凹凸を調べよ.

(3) 関数 $\phi(x)$ の $x = 1$ における Taylor 展開

$$\phi(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + \cdots$$

の係数 c_0, c_1, c_2, c_3 を求めよ.

12 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 6y,\ g(x,y) = x^2 - y^2 + 3$ について, 次の問いに答えよ

(1) 条件 $g(x,y) = 0$ の下での関数 $f(x,y)$ の極値を考える. Lagrange の未定乗数法を用いて得られる, 極値をとる点の候補をすべて求めよ (全部で 4 点あるはず).

(2) (1) で求めた各点 (a,b) について, 曲線 $g(x,y) = 0$ が点 (a,b) の近傍で定める陰関数 $y = \varphi(x)$ に対する $\varphi(a), \varphi'(a), \varphi''(a)$ の値を求めよ.

(3) (1) の極値を「点 (a,b) で極大値 (or 極小値) c をとる」という形で答えよ.

- 解けない問題があっても勿論構いませんが, 解答数が余りにも少ない場合は減点の対象とします.
- 友達と相談しても構いませんが, 最終的に自分で納得し, 自分の言葉で解答して下さい. 酷似した表現, 全く同じ誤答など, 丸写しに近いレポートが発見された場合は減点することがあります.
- レポートの返却はしませんが, かわりに解答例を配布します.