§1　wavelet とは何か

1.1　信号とwavelet

1.2　wavelet変換

1.3　Parseval の等式と不確定性関係

1.4　離散wavelet変換

1.5　多重解像度解析

1.1 信号とwavelet

信号 $\cdots$ エネルギー有限な関数 $f(x)$ (二乗可積分関数, L^2 関数)

Fourier解析は, 信号を$\cos, \sin$の重ね合わせで表し, その特徴から信号の性質を調べる

- 信号が周期的な場合(周期2π, or $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$上の関数)

$$\text{“エネルギー”} := \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty \quad (f \in L^2(\mathbb{T}) \text{ と表す})$$

$f \in L^2(\mathbb{T})$ は **Fourier級数** で表現される:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, dx \ \ (\text{Fourier係数})$$

$f, g \in L^2(\mathbb{T})$ に対して, 内積

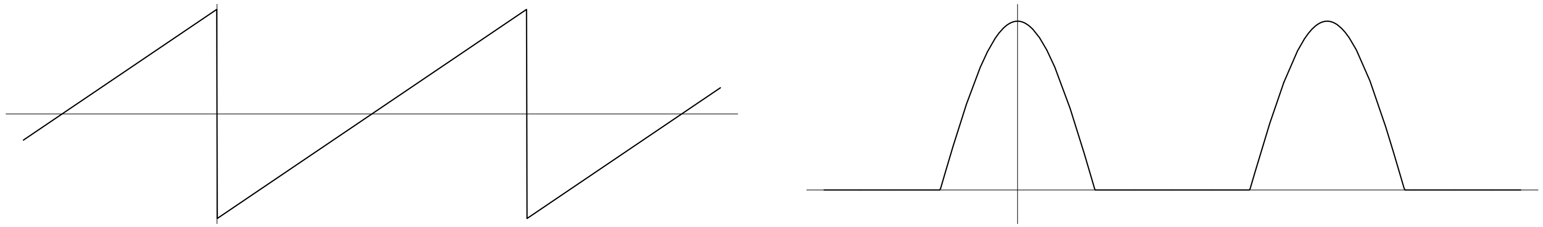
$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} \, dx \quad \left(\text{ノルム } \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} := \langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})}^{1/2}\right)$$

を導入すれば, $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の 正規直交基底 (直交座標系)となる.

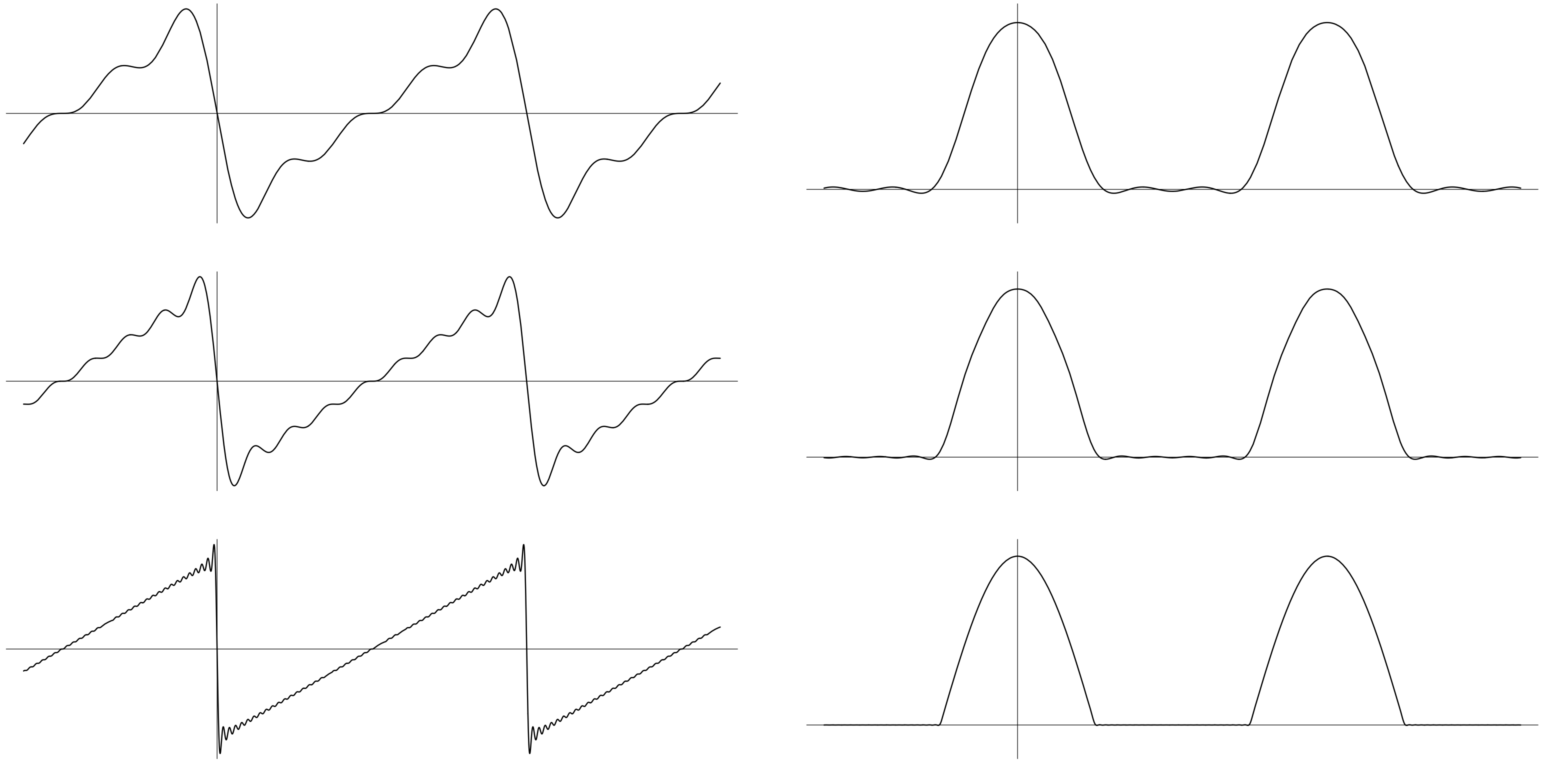
$\rightarrow$ Fourier係数 c_n は $f(x)$ の “e^{inx}方向” の成分: $c_n = \langle f(x), e^{inx} \rangle$

(注: $e^{inx} = (e^{ix})^n$)

典型的なFourier級数の収束の様子 $(|n| \leqslant 4,\ |n| \leqslant 8,\ |n| \leqslant 50)$



鋸歯状波　　　　半波整流波



- 信号が周期的でない場合($\mathbb{R}$上の関数, 遠方では速く減衰)

$$\text{“エネルギー”} := \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx < \infty \quad (f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ と表す})$$

$f \in L^2(\mathbb{R})$ の **Fourier変換** に対する反転公式は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{ix\omega}\,d\omega, \quad \widehat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \ \ (\text{Fourier変換})$$

$f, g \in L^2(\mathbb{T})$ に対して, 内積

$$\langle f, g\rangle = \langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \quad \Big(\text{ノルム } \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := \langle f, f\rangle_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}\Big)$$

を導入すれば, $\left\{\dfrac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{\omega\in\mathbb{R}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の “正規直交基底” と考えられる.

$\rightarrow$ $\dfrac{\widehat{f}(\omega)}{\sqrt{2\pi}}$ は $f(x)$ の “$\dfrac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}$方向” の成分 : $\quad \dfrac{\widehat{f}(\omega)}{\sqrt{2\pi}} = \overbrace{\left\langle f(x), \dfrac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle}^{f\text{ の周波数成分}}$

(注: $e^{i\omega x} = (e^{ix})^{\omega}$)

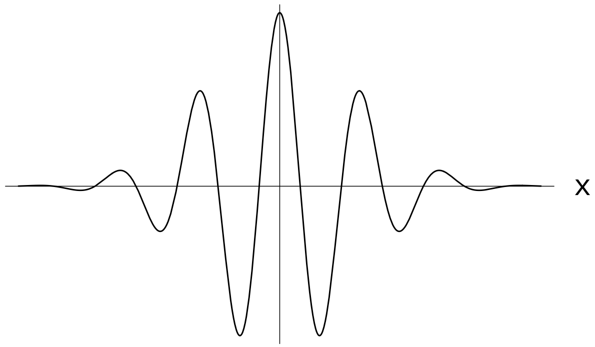
- 信号 $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, Fourier解析の手法($\cos, \sin$ の重ね合わせ)では

  周波数構造が時刻(場所) x に関してどのように変化しているかが捉えにくい

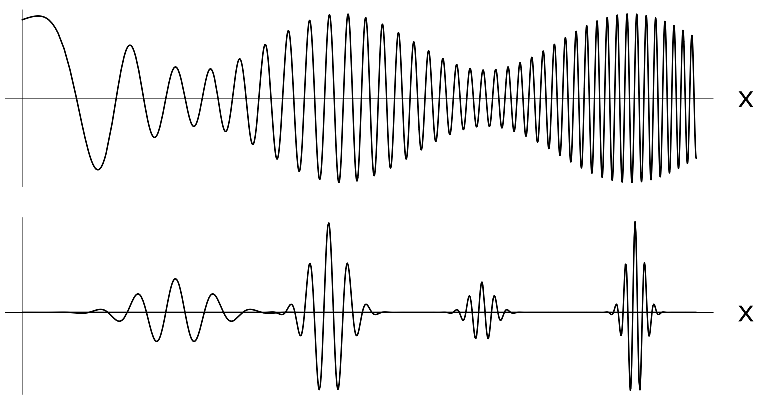
- そこで **wavelet** の登場. wave は "波" (平均0), let は "小さい". すなわち,

  wavelet $=$ small wave $\cdots$ **局在した波**の総称

信号を(1つのwaveletから生成される) 多くのwavelets波形の重ね合わせで表現し
その特徴から信号の性質を調べる $\longrightarrow$ **wavelet解析**



waveletの例 ($\psi(x)$ で表す)



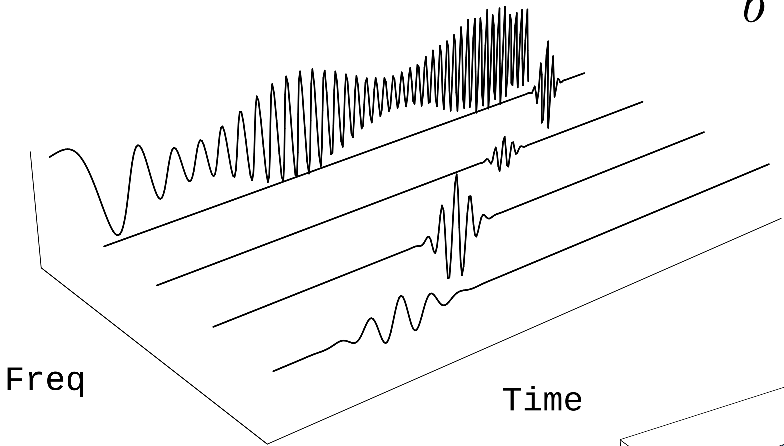
信号の切り出し (waveletを縦横に拡大・縮小)

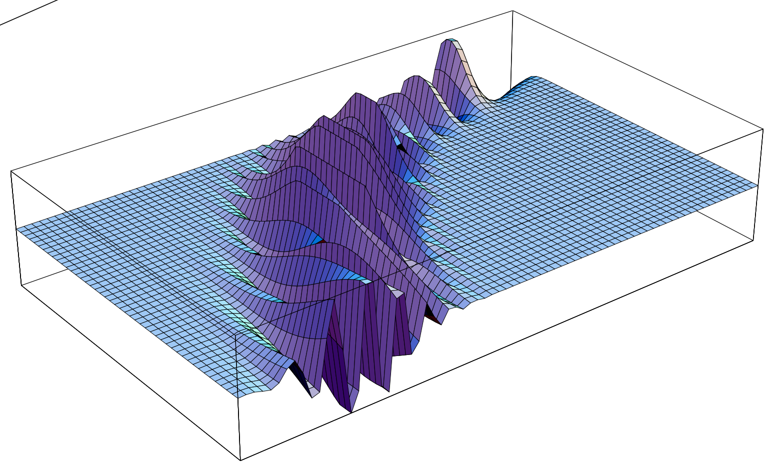
- **analyzing wavelet** $\psi(x)$ $\cdots$ waveletsを生成する基底関数 $\leftarrow$ “母”
  (mother wavelet)

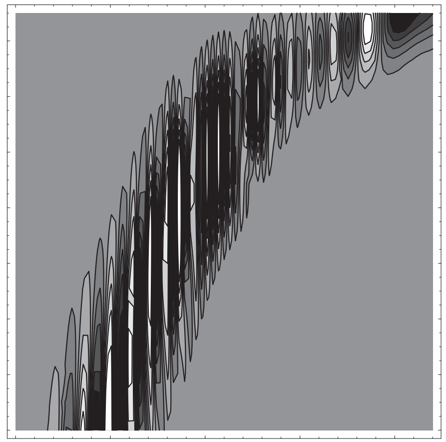
  信号を切り出す際は $\psi^{a,b}(x) := \dfrac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\Big(\dfrac{x-b}{a}\Big)$ の形 $\leftarrow$ “子供達”

- **信号平面** (= 時間周波数平面) 上の表現

$$b : \text{時間}, \quad \frac{1}{a} : \text{周波数}$$

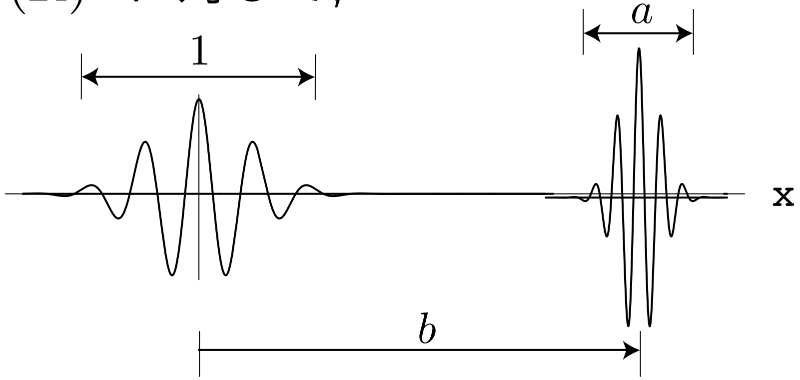






$$\psi(x) = e^{-(\frac{x}{8})^2}\cos x$$

analyzing wavelet $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して,



$$\psi(x) \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)$$

$a\ (>0)$: scale parameter, b : translation parameter

- **(連続) wavelet変換**

$$(W_\psi f)(a,b) := \langle f, \psi^{a,b} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, \overline{\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)}\, dx$$

- **逆wavelet変換**

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a,b)\, \frac{1}{\sqrt{|a|}}\, \psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)\, \frac{da\, db}{a^2} \qquad \Big(d\Big(\frac{1}{a}\Big)db\Big)$$

- 逆変換が定義できるためには, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, **admissible条件**

$$C_\psi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\, d\omega < \infty$$

が要請される. 十分条件として,

$$\underbrace{\widehat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx = 0,}_{\text{“波” (平均 0)}} \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)^\epsilon |\psi(x)|\, dx < \infty}_{\text{遠方で “速く” 減衰}} \quad (\epsilon > 0 : \text{定数}).$$

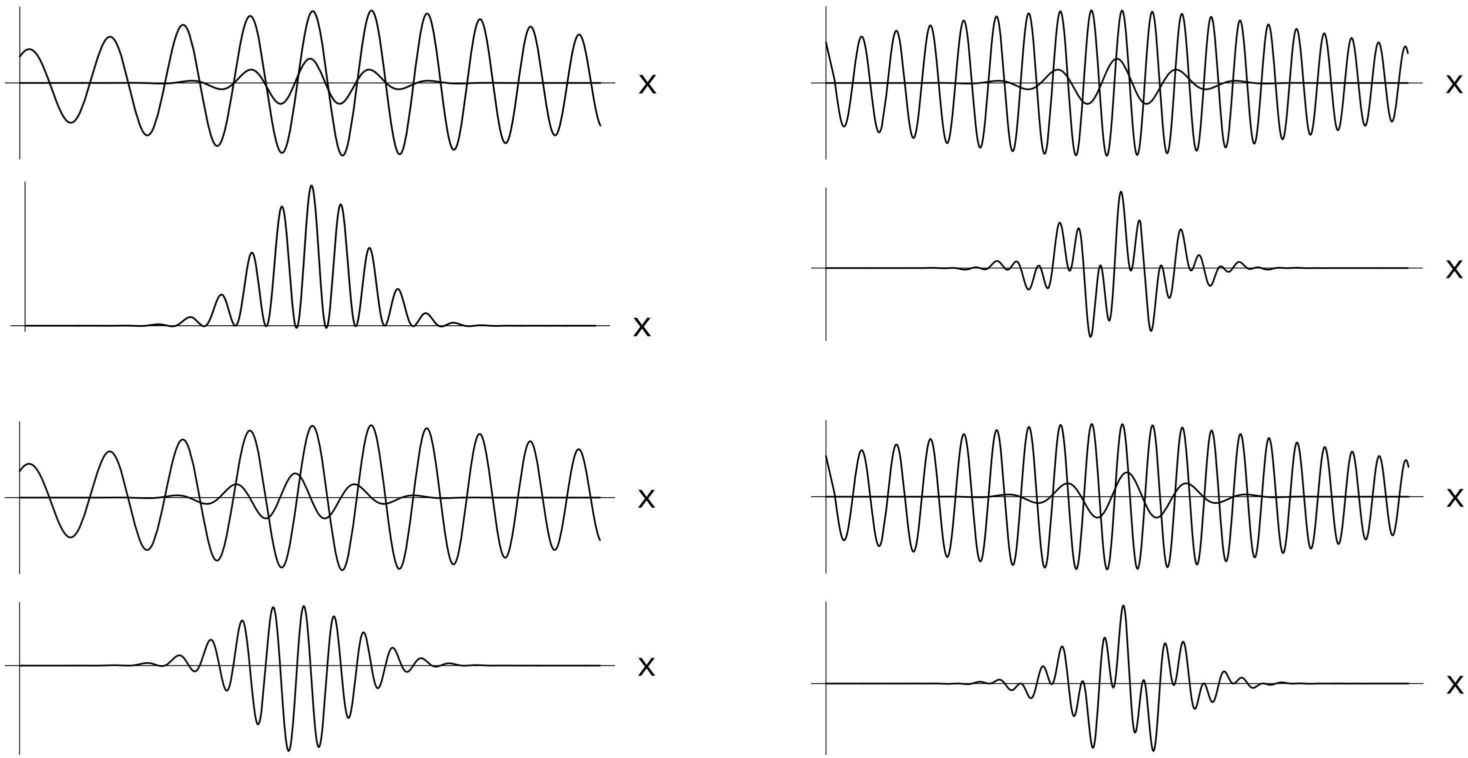
特に, $\psi(x)$ が実数値ならば, $\widehat{\psi}(-\omega) = \overline{\widehat{\psi}(\omega)}$ となり, $a > 0$ に対する $(W_\psi f)(a,b)$ だけを用いて逆変換できる:

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^{\infty} (W_\psi f)(a,b) \psi^{a,b}(x)\, db \right) \frac{da}{a^2}.$$

- 次のエネルギー等式が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |(W_\psi f)(a,b)|^2 \frac{da\,db}{a^2}.$$

- $f(x)$, $\psi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ および $f(x)\,\psi\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ のグラフ　$(a>0)$

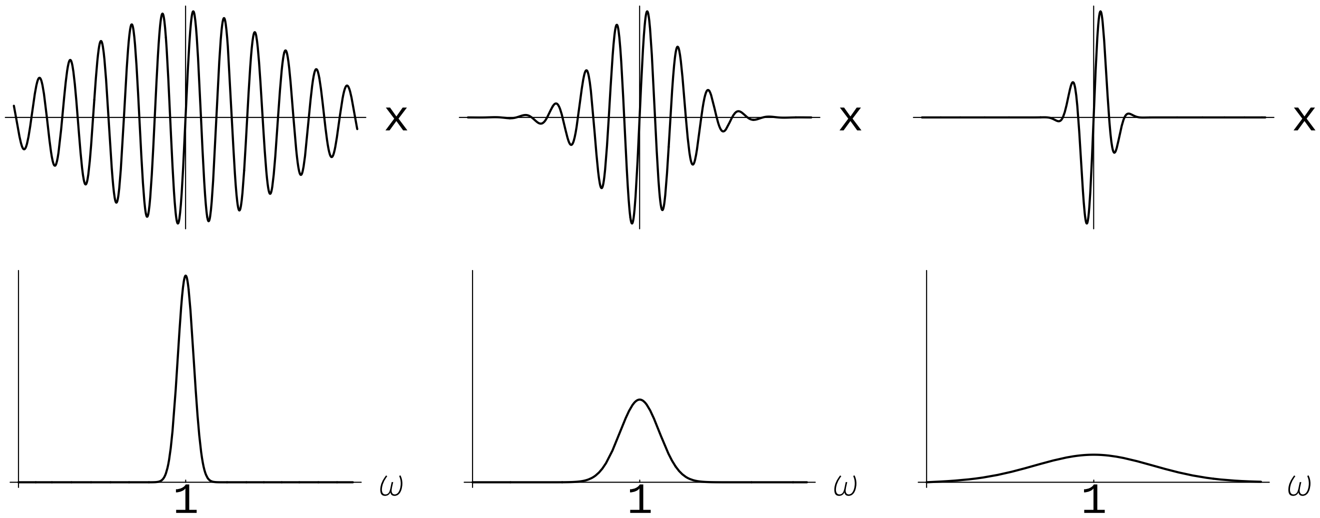


$$f(x) \sim \pm\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad \Rightarrow \quad (W_\psi f)(a,b) \sim \pm \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \left|\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right|^2 dx$$

- **時間周波数解析**

  信号を時間と周波数の両面から捉えること (信号を信号平面で表現すること).

  信号の位置の不確定性と周波数の不確定性は, 同時に小さくできない！　例えば,



$\underbrace{e^{-(\frac{x}{s})^2}}_{\text{“窓”}} \sin x \quad (s = 30, 12, 4)$ とそのFourier変換の虚部(実部は0)のグラフ

【問1.1】 $e^{-(\frac{x}{s})^2} \sin x \ (s > 0)$ のFourier変換を計算せよ.

- **Parsevalの等式**

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle$$

特に，$\|f\| = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\widehat{f}\,\|\quad (f, g \in L^2(\mathbb{R}))$

すなわち $\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx}_{\text{全エネルギー}} = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|\left\langle f(x),\ \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle\right|^2}_{\text{エネルギースペクトル } E(\omega)} d\omega$

- **不確定性関係**

$f(x),\, xf(x),\, \omega\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ ($f \neq 0$) のとき，

$$x^* := \frac{1}{\|f\|^2}\int x\,|f(x)|^2\,dx,\quad \Delta_f := \frac{1}{\|f\|}\left(\int (x-x^*)^2|f(x)|^2\,dt\right)^{1/2},$$

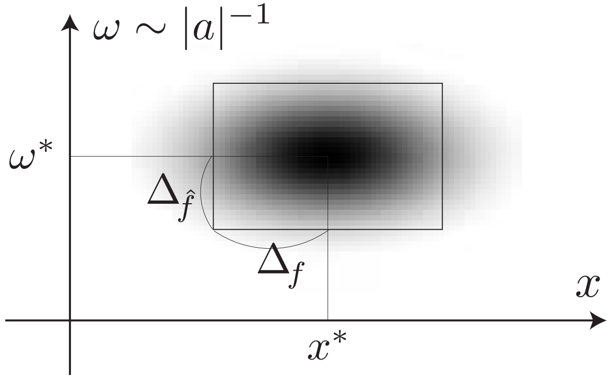
$$\omega^* := \frac{1}{\|\widehat{f}\|^2}\int \omega|\widehat{f}(\omega)|^2\,d\omega,\quad \Delta_{\widehat{f}} := \frac{1}{\|\widehat{f}\|}\left(\int (\omega-\omega^*)^2|\widehat{f}(\omega)|^2\,d\omega\right)^{1/2}$$

中心 (平均)　　　　**幅** (標準偏差)

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Delta_f\Delta_{\widehat{f}} \geqslant \frac{1}{2}}$$

$\left(\dfrac{|f(x)|^2}{\|f\|_{L^2}^2},\ \dfrac{|\widehat{f}(\omega)|^2}{\|\widehat{f}\|_{L^2}^2}\right.$ は確率密度関数！$\left.\right)$

- **信号の最小単位**



信号 $f(x)$ の情報の集中する
信号平面上の長方形の面積は

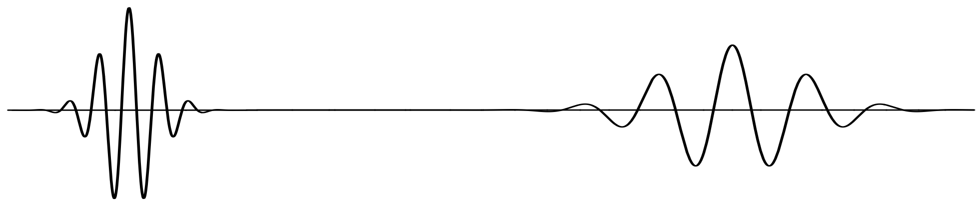
$$2\Delta_f \cdot 2\Delta_{\hat{f}} \geqslant 2$$

$\Rightarrow$ 面積2の(長方形)領域が <u>信号の最小単位</u>

高周波数では短い時間幅, 低周波数では長い時間幅

$\Rightarrow$ wavelet変換 ($\dfrac{1}{\sqrt{|a|}}\,\psi\Big(\dfrac{x-b}{a}\Big)$ による情報の切り出し) は
合理的な時間周波数解析の手法 (周波数 $\sim |a|^{-1}$, 波の時間幅 $\sim |a|$)

$|a|$: 小 $\leftrightarrow$ 高周波数 & 短時間, $\quad$ $|a|$: 大 $\leftrightarrow$ 低周波数 & 長時間



【問1.2】 $\psi(x) = e^{-x^2/2}$, $(1-x^2)e^{-x^2/2}$ に対して, $\Delta_\psi \Delta_{\widehat{\psi}}$ を計算せよ.

【問1.3】 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (実数値関数) に対して,

$$\psi^{a,b}(x) := \frac{1}{\sqrt{|a|}}\,\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

(1) $\|\psi^{a,b}\|_{L^2}$ は a, b ($a \neq 0$) によらずに一定の値を取ることを示せ.

(2) Parsevalの等式を用いて次を示せ. (簡単のため $a > 0$ とする)

$$(W_\psi f)(a,b) \overset{\mathsf{def}}{=} \Big\langle f(x),\ \psi^{a,b}(x)\Big\rangle_{L^2_x} = \frac{1}{2\pi}\Big\langle \widehat{f}(\omega),\ \sqrt{a}\,\widehat{\psi}(a\omega)e^{-ib\omega}\Big\rangle_{L^2_\omega}$$

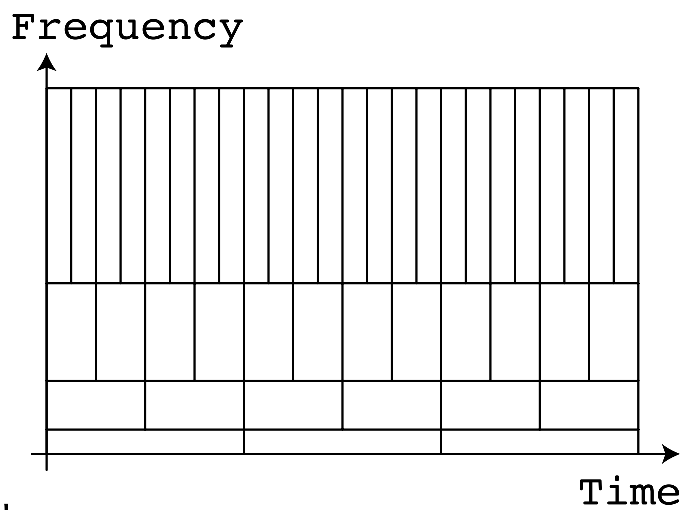
(3) 次の値を, ψ の中心 x^* と幅 Δ_ψ, および $\widehat{\psi}$ の中心 ω^* と幅 $\Delta_{\widehat{\psi}}$ を用いて表せ.

$\psi^{a,b}(x)$ の中心と幅, および $\sqrt{a}\,\widehat{\psi}(a\omega)$ の中心と幅

1.4 離散wavelet変換

- wavelet変換 $(W_\psi f)(a,b)$ は $f(x)$ の情報としては冗長

  $\Rightarrow$ $f(x)$ を復元するには,
  互いに重ならない最小単位の領域の組を選び,
  代表点での $(W_\psi f)(a,b)$ の値を列挙すればよいだろう



- **離散wavelet変換** $\left(f \mapsto \{d_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}\right)$

$(W_\psi f)(a,b)$ を $(b, 1/a) = (2^{-j}k, 2^j)$ とおいて離散化

$$\boxed{\begin{aligned} d_{j,k} &:= (W_\psi f)(2^{-j}, 2^{-j}k) = \langle f, \psi_{j,k}\rangle \\ \psi_{j,k}(x) &:= 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \quad (j,k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}}$$

これらの値だけから $f(x)$ が復元できる場合がある.

《注》逆変換 $\left(\{d_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}} \mapsto f\right)$ が存在するためには, 少なくとも,
$\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の基底をなす必要がある. (きつい制限)

もし $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ が **直交 wavelet** $\Big(\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の<u>正規直交基底</u>$\Big)$ であれば, 応用上きわめて都合がよい.

- $f(x) = \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\,\psi_{j,k}(x), \quad d_{j,k} := \langle f, \psi_{j,k}\rangle \quad (j,k \in \mathbb{Z})$
- $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \|d_{j,k}\psi_{j,k}\|^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} |d_{j,k}|^2$

$\psi(x)$ が $x = 0$ の周りに分布しているとすると,

- $\psi_{j,k}(x)$ は $x = 2^{-j}k$ の周りに分布し, その波形は $\psi(x)$ を拡大・縮小したもの:

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k) = 2^{j/2}\psi\left(\frac{x - 2^{-j}k}{2^{-j}}\right)$$

- 展開係数 $d_{j,k}$ は $f(x)$ の中に $\psi_{j,k}(x)$ の成分がどれくらいあるかを表す.
(**レベル j の詳細係数** または **wavelet 係数** と呼ばれる)

1.5 多重解像度解析

直交waveletの構成法について考える.

$\psi(x)$ が直交waveletのとき, $f \in L^2(\mathbb{R})$ の直交wavelet展開

$$f(x) = \sum_j \sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x), \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (j, k \in \mathbb{Z})$$

において,

$$g_j(x) := \sum_k d_{j,k}\psi_{j,k}(x)$$

レベル j の**詳細**

解像度レベル

$$f_j(x) := g_{j-1}(x) + g_{j-2}(x) + \cdots$$

レベル j の**近似**

(レベルが j より粗い変動を表す部分)

と定めれば,

$$f_j(x) \ \to \ f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j(x) \quad (j \to \infty)$$

十分大きな j では $f_j(x)$ は $f(x)$ のよい近似になっていると考えられる.

$f_j(x)$ は分解を繰り返すことにより,

$$\begin{aligned} f_j(x) &= f_{j-1}(x) + g_{j-1}(x) \\ &= f_{j-2}(x) + g_{j-2}(x) + g_{j-1}(x) \\ &= \cdots\cdots \\ &= f_{j_0}(x) + \sum_{j_0 \leqslant j' < j} g_{j'}(x) \quad (j > j_0) \end{aligned}$$

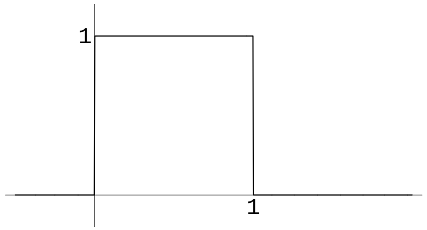
これより

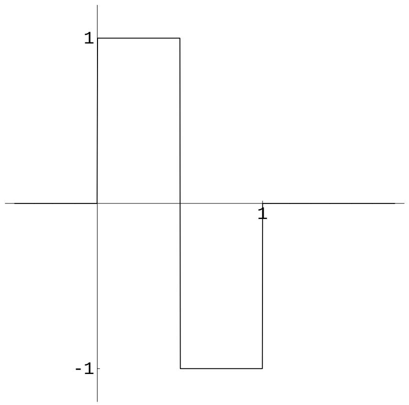
- 詳細部分 $g_j(x)$ は隣り合うレベルの近似 $f_{j+1}(x)$ と $f_j(x)$ の「差分」であり,
- $f_j(x)$ が粗い近似 $f_{j_0}(x)$ に各 $j' = j_0, j_0+1, \ldots, j-1$ における詳細部分 $g_{j'}(x)$ を順々に足したものに等しい

以上をまとめて,

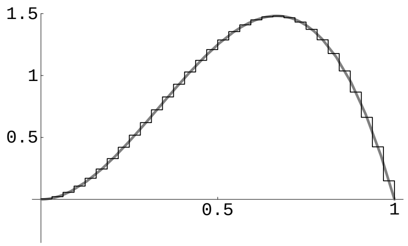
$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j(x) = f_{j_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} g_j(x) \quad (j_0 \in \mathbb{Z} \text{ は任意})$$

〔例〕 Haar scaling関数(後出)，Haar wavelet (最も単純な直交wavelet)

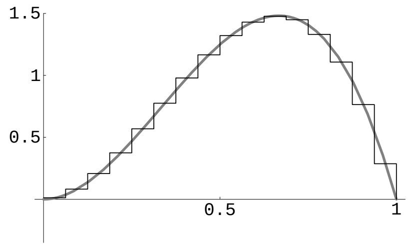




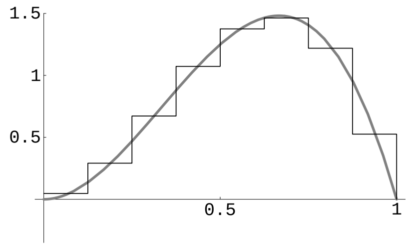
の場合，



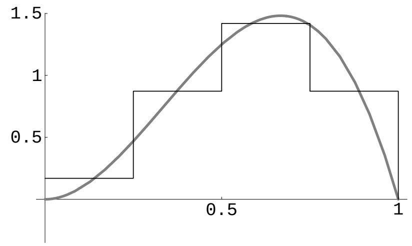
$f_5(x)$



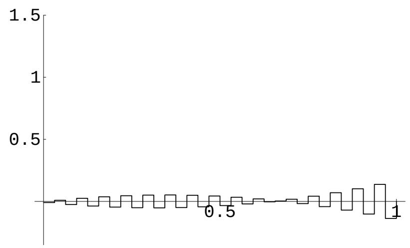
$f_4(x)$



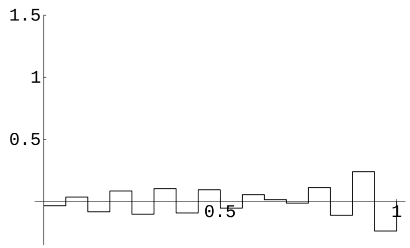
$f_3(x)$



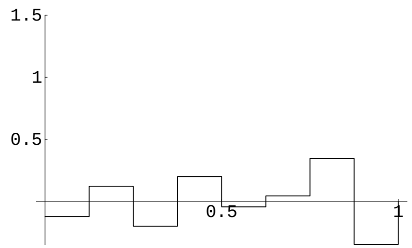
$f_2(x)$



$g_4(x)$



$g_3(x)$



$g_2(x)$

上の議論において,

$$W_j := (\{\psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ の生成する } L^2(\mathbb{R}) \text{ の閉部分空間}),$$

$$V_j := W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \cdots = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (V_j \text{ は “レベル } j \text{ の近似空間”})$$

とおけば, $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は次を満たす.

(1) $\cdots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$

(2) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$

(3) $f \in V_j \quad \Leftrightarrow \quad f(2^{-j}\cdot) \in V_0$

(4) $f \in V_0 \quad \Leftrightarrow \quad$ すべての $n \in \mathbb{Z}$ について $f(\cdot - n) \in V_0$

直交wavelet を構成するために, $\{W_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ から得られた $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ の方に注目し, 先に適当な $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ (対応する “直交scaling”) を構成し, それを用いて直交wavelet を構成するという戦略をとる.

《定義》 (多重解像度解析)

$L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間の族 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が次の５つの条件(i)—(v)を満たすとき, $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ を **多重解像度解析 (MRA)** という.

(i) $V_j \subset V_{j+1} \quad (j \in \mathbb{Z})$

(ii) $f(x) \in V_j \;\Leftrightarrow\; f(2x) \in V_{j+1} \quad (j \in \mathbb{Z})$

(iii) $f(x) \in V_0 \;\Leftrightarrow\; f(x-k) \in V_0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

(iv) $\exists\varphi \in V_0$: $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が V_0 の正規直交基底 (φを **直交scaling関数** と呼ぶ)

(v) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \quad \overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^2)$

直交scaling関数 φ が得られれば, それから直交wavelet ψ が一般論で構成できる.

直交scaling関数 $\varphi(x)$ は **two-scale関係** $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k \varphi(2x-k)$ の係数を決めることにより得られる. このとき, 直交wavelet $\psi(x)$ は $W_0 := V_1 \ominus V_0$ (V_1におけるV_0の直交補空間)の “基底関数” として決まる.