

2.4 Fourier 変換の偏微分方程式への応用

1 1次元の熱方程式

1次元熱方程式の初期・境界値問題

$$(H) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t > 0, x \in \mathbb{R}) \quad \dots \textcircled{1} & \text{(熱方程式)} \\ u(0, x) = a(x) & (x \in \mathbb{R}) \quad \dots \textcircled{2} & \text{(初期条件)} \\ u(t, -\infty) = u(t, \infty) = 0 & (t > 0) \quad \dots \textcircled{3} & \text{(境界条件)} \end{cases}$$

について考える. (定数 $\kappa > 0$ は熱伝導率を表す.)

$a \in M(\mathbb{R})$ と仮定し, 解 $u = u(t, x)$ を

- $u \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}), \quad u_t, u_x, u_{xx} \in C((0, \infty) \times \mathbb{R})$ (古典解)
- 各 $t > 0$ で, $u(t, \cdot), u_t(t, \cdot), u_x(t, \cdot), u_{xx}(t, \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$
($\rightarrow$ Fourier 変換可能)

なるクラスで探そう. (このような u は③を満たすことに注意.)

変数 x に関する Fourier 変換を $\hat{\cdot}$ で表す:

$$\hat{a}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int a(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \hat{u}(t, \xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int u(t, x) e^{-ix\xi} dx.$$

①, ② を x で Fourier 変換すれば,

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t, \xi) = -\kappa \xi^2 \hat{u}(t, \xi) & (t > 0) \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{a}(\xi) \end{cases} \quad \therefore \hat{u}(t, \xi) = e^{-\kappa \xi^2 t} \hat{a}(\xi)$$

ここで,

$$e^{-\kappa t \xi^2} = \frac{1}{2\kappa t} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}\right)(\xi) \quad (\S 2.1 \text{ 例 (2)})$$

であるから, 定理 2.7 を用いて,

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}\right)(\xi) \hat{a}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} * a\right)(\xi).$$

従って,

$$K(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \quad (t > 0, x \in \mathbb{R})$$

とおけば,

$$u(t, x) = (K(t, \cdot) * a)(x) = \int K(t, x - y) a(y) dy. \quad \cdots (*)$$

定理 4.1 $a \in C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ のとき,

- (1) (H) は $C([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times \mathbb{R})$ において一意な解 u をもち,
それは (*) で与えられる. 但し,
- (2) 解 u は $C([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ に属する.

《注》 初期条件は, $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = a(x)$ (広義一様収束) の意味で解釈.

【証】 上では議論の結果として (*) が得られたが, ここでは (*) で表される u を出発点として,

- (*) で与えられる $u = u(t, x)$ は $C([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ に属する (H) の解.
- (H) の解は $C([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times \mathbb{R})$ において一意的.

という順序で証明を行う.

まず, $K(t, x)$ が

$$\partial_t K(t, x) = \kappa \partial_x^2 K(t, x) \left(= \frac{x^2 - 2\kappa t}{8\sqrt{\pi}(\kappa t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} \right) \quad (t > 0)$$

を満たすことに注意する. 更に, 各 $j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t_1 > 0$ に対して,

$$|\partial_t^j \partial_x^k K(t, x)| \leq \frac{C_1(j, k)}{t^{(2j+k+1)/2}} \left\{ 1 + \left(\frac{x^2}{t} \right)^{\frac{2j+k}{2}} \right\} e^{-\frac{1}{4\kappa} \left(\frac{x^2}{t} \right)} \leq \frac{C_2(j, k)}{t_1^{(2j+k+1)/2}} \\ ((t, x) \in [t_1, \infty) \times \mathbb{R})$$

と評価されるから, $t > 0$ のとき積分記号下の $(x, t$ に関する) 微分を繰り返して $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$ を得る (第 1 章・命題 7.5 参照). 特に,

$$\partial_t u(t, x) - \kappa \partial_x^2 u(t, x) = \int (\partial_t K(t, x - y) - \kappa \partial_x^2 K(t, x - y)) a(y) dy = 0.$$

次に, $\lim_{t \rightarrow +0} u(t, x) = a(x)$ であることは, 定理 2.3 の証明 (問 2.1) と同様. また, $|K(t, x - y)a(y)| \leq (C_0/\sqrt{t})|a(y)| \in L^1(\mathbb{R}_y)$ ($t > 0$) より, Lebesgue の収束定理

を用い, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = \int \lim_{x \rightarrow \pm\infty} K(t, x - y) a(y) dy = 0 \quad (t > 0).$

最後に $C([0, \infty) \times \mathbb{R}) \cap C^2((0, \infty) \times \mathbb{R})$ での一意性を示す. $a = 0$ のとき, このクラスの解 $u = u(t, x)$ が 0 に限られることをいえば十分. $v(t, x) = e^{-t} u(t, x)$ とおけば, $v = v(t, x)$ は次を満たす:

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \kappa \partial_x^2 v - v \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}), \\ v(t, \pm\infty) &= 0 \quad (t > 0), \quad v(0, x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

$v \neq 0$ と仮定すれば, 後ろ 2 つの条件より, v は $[0, T] \times \mathbb{R}$ ($T > 0$: 十分大) で正の最大値または負の最小値をとる. $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ で最大値をとるならば,

$$\begin{aligned} \partial_x v(t_0, x_0) &= 0, \quad \partial_t v(t_0, x_0) \geq 0, \quad \partial_x^2 v(t_0, x_0) \leq 0. \\ (0 < t_0 < T &\Rightarrow \partial_t v(t_0, x_0) = 0) \end{aligned}$$

ところが, このとき $0 < v(t_0, x_0) = \kappa \partial_x^2 v(t_0, x_0) - \partial_t v(t_0, x_0) \leq 0$ (矛盾). 負の最小値をとるとしてもやはり矛盾が導かれる. よって $v = 0$, すなわち $u = 0$ となり, 一意性が示された. □

2 1次元の波動方程式

1次元波動方程式の初期・境界値問題

$$(W) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (t > 0, x \in \mathbb{R}) \quad \dots \textcircled{4} \text{ (波動方程式)} \\ u(0, x) = a(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = b(x) & (x \in \mathbb{R}) \quad \dots \textcircled{5} \text{ (初期条件)} \\ u(t, -\infty) = u(t, \infty) = 0 & (t > 0) \quad \dots \textcircled{6} \text{ (境界条件)} \end{cases}$$

について考える. (定数 $c > 0$ は伝播速度を表す.)

まず, $a = 0$ の場合から始める. このとき, ④, ⑤ を x で Fourier 変換すれば,

$$\begin{cases} \partial_t^2 \hat{u}(t, \xi) = -c^2 \xi^2 \hat{u}(t, \xi) & (t > 0) \\ \hat{u}(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(0, \xi) = \hat{b}(\xi) \end{cases} \quad \therefore \hat{u}(t, \xi) = \frac{\sin c\xi t}{c\xi} \hat{b}(\xi)$$

ここで,

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ct\xi}{\xi} = \hat{\chi}_{[-ct, ct]}(\xi) \quad (\S 2.1 \text{ 例 (1)})$$

であったから,

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\chi}_{[-ct, ct]}(\xi) \hat{b}(\xi) = \frac{1}{2c} \mathcal{F}(\chi_{[-ct, ct]} * b)(\xi).$$

よって,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2c} (\chi_{[-ct, ct]} * b)(x) \\ &= \frac{1}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-ct, ct]}(x - y) b(y) dy = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) dy. \end{aligned}$$

次に, 上で得た $u = u(t, x)$ に対して $v := \partial_t u$ は

$$\partial_t^2 v = c^2 \partial_x^2 v; \quad v(0, x) = b(x), \quad \partial_t v(0, x) = 0$$

を満たし,

$$v(t, x) = \partial_t u(t, x) = \frac{1}{2} (b(x + ct) + b(x - ct)).$$

以上より, (W) の解は

$$u(t, x) = \frac{1}{2} (a(x + ct) + a(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} b(y) dy \quad \cdots (\star)$$

で与えられる (d'Alembert の公式).

定理 4.2 a, b が $a \in C^2(\mathbb{R}), b \in C^1(\mathbb{R}); a(\pm\infty) = b(\pm\infty) = 0$ を満たすとき, (W) の一意解 $u \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ が存在し, d'Alembert の公式 $(\star)$ で与えられる.

【証】 a, b の条件より, $(\star)$ で与えられる $u = u(t, x)$ は $C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ に属し, (W) の解であることが容易に確かめられる. 以下, 一意性を示す. そのために,

$$e(w) \equiv e(t, x; w) := \frac{1}{2} (\partial_t w(t, x)^2 + c^2 \partial_x w(t, x)^2) \quad (w \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}))$$

とおき, (W) の任意の解 $u \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ に対してエネルギー不等式

$$\int_{|x-x_0| \leq c(T-t)} e(t, x; u) dx \leq \int_{|x-x_0| \leq cT} (a'(x)^2 + c^2 b(x)^2) dx$$

$$(x_0 \in \mathbb{R}, 0 < t < T < \infty)$$

を示す. (これが示されれば, $a = b = 0 \Rightarrow u = 0$ となり, 解 $u \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ の一意性が従う.) (W) の解 u に対して,

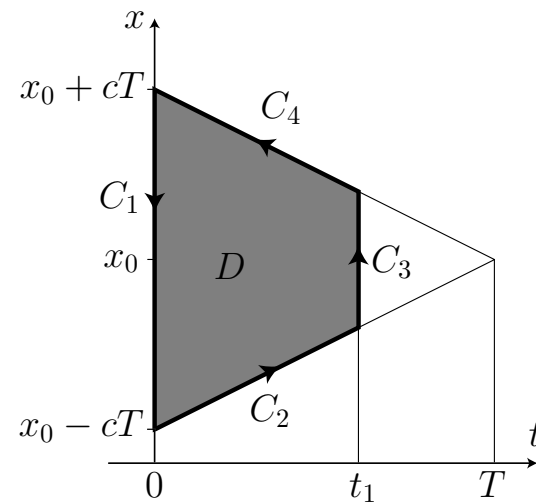
$$0 = \partial_t u (\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u) = \partial_t e(u) - c^2 \partial_x (\partial_t u \partial_x u)$$

が成り立ち, これを台形 $D = \{(t, x); 0 \leq t \leq t_1, |x - x_0| \leq T - t_1\}$ ($0 \leq t_1 \leq T$) 上で積分すると, Green の定理により,

$$0 = \iint_D (\partial_t e(u) - c^2 \partial_x (\partial_t u \partial_x u)) dt dx = \int_{\partial D} (c^2 \partial_t u \partial_x u dt + e(u) dx) = 0.$$

右図のように C_1, C_2, C_3, C_4 をとれば, 上式において, まず,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} \{\cdots\} &= - \int_{|x-x_0| \leq cT} e(0, x; u) dx \\
&= - \int_{|x-x_0| \leq cT} (a'(x)^2 + c^2 b(x)^2) dx, \\
\int_{C_3} \{\cdots\} &= \int_{|x-x_0| \leq c(T-t_1)} e(t_1, x; u) dx.
\end{aligned}$$



また, C_2, C_4 は

$$C_2 : \begin{cases} t = s \\ x = cs + x_0 - cT \end{cases}, \quad C_4 : \begin{cases} t = t_1 - s \\ x = -c(t_1 - s) + x_0 + cT \end{cases} \quad (0 \leq s \leq t_1)$$

とパラメータ表示できるから,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \{\cdots\} &= \int_0^{t_1} c (c \partial_t u \partial_x u + e(u)) ds \geq 0, \\ \int_{C_4} \{\cdots\} &= \int_0^{t_1} c (-c \partial_t u \partial_x u + e(u)) ds \geq 0.\end{aligned}$$

ここでの不等号は, 不等式: $|c \partial_x u \partial_t u| \leq \frac{1}{2}(\partial_t u^2 + c^2 \partial_x u^2) = e(u)$ による. 従って, $0 < t_1 < T$ に対して,

$$\int_{|x-x_0| \leq c(T-t_1)} e(t_1, x; u) dx \leq \int_{|x-x_0| \leq cT} (a'(x)^2 + c^2 b(x)^2) dx$$

が示され, 一意性の証明が終わる.

□