

1.2 Fourier 級数の一様収束

- 1 関数列の一様収束
- 2 Fejér の定理
- 3 Dirichlet の定理

1 関数列の一様収束

定義 (数列 $\{a_n\}$, 級数 $\sum a_n$ の収束・発散)

(1) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $a (\in \mathbb{C})$ に収束する

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \forall n : n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

すなわち,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して番号 $n_1 = n_1(\varepsilon)$ を適当にとれば,
 $n \geq n_1$ なるすべての番号 n で $|a_n - a| < \varepsilon$ が成り立つ.

(2) $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ が「 A に収束する」あるいは「和 $A = \sum a_n$ をもつ」

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \text{部分和 } A_N := \sum_{n \leq N} a_n \text{ の作る数列 } \{A_N\} \text{ が } A \text{ に収束する}$$

(3) 発散 = 収束しない

定義 級数 $\sum a_n$ に対して

- (1) $\sum a_n$ が絶対収束する $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum |a_n|$ が収束する.
- (2) $\sum a_n$ が条件収束する $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum a_n$ が収束し, $\sum |a_n|$ が発散する.

定理 2.1 (絶対収束級数の性質)

- (1) 絶対収束級数は収束する.
- (2) $\sum a_n$ が絶対収束し, 和 A をもつ.
 $\Rightarrow \{a_n\}$ を勝手な順に並べた級数も絶対収束し, 和 A をもつ.
- (3) $\sum a_n, \sum b_n$ が絶対収束し, それぞれ和 A, B をもつ.
 $\Rightarrow \{a_l b_m\}$ を勝手な順に並べた級数も絶対収束し, 和 AB をもつ.

定義 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}$ に対して,

(1) $\{f_n\}$ が I 上で各点収束 (または単純収束) する

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 各 $x \in I$ において $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在する

(I 上の関数 $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を $\{f_n\}$ の極限関数と呼ぶ)

($\Leftrightarrow \forall x \in I \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \forall n : n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$)

(2) $\{f_n\}$ が I 上で f に一様収束する

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \|f_n - f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

($\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_1 \forall x \in I \forall n : n \geq n_1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$)

定理 2.2 関数列 $\{f_n\} \subset C(I)$ に対して,

$$\{f_n\} \text{ が } I \text{ 上で一様収束} \Rightarrow \text{極限関数 } f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in C(I).$$

【証】 任意の点 $x_0 \in I$ における f の連続性を示す. $\varepsilon > 0$ を任意に固定する. $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ より, n_1 を十分大きくとれば, $\|f_{n_1} - f\|_\infty < \varepsilon/3$. よって,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| + |f_{n_1}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f_{n_1} - f\|_\infty + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)|. \end{aligned}$$

ここで, $f_{n_1} \in C(I)$ より,

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0 \forall x \in I : |x - x_0| < \delta &\Rightarrow |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

これは $f(x)$ の x_0 での連続性を意味する.

□

定理 2.3 $I = [a, b]$ 上の関数列 $\{f_n\} \subset C(I)$ について,

(1) [極限と積分の順序交換]

$$\{f_n\} \text{ が一様収束 } \Rightarrow \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

(2) [項別積分]

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ が一様収束 } \Rightarrow \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

【証】 (1) のみを示す. $\{f_n\}$ の極限関数を f とすれば,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq (b-a) \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

定理 2.4 関数列 $\{f_n\} \subset C^1(I)$ に対して,

(1) [極限と微分の順序交換]

I 上で $\{f'_n\}$ が一様収束し, $\{f_n\}$ が各点収束する

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (f := \lim f_n \in C^1(I))$$

(2) [項別微分]

I 上で $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ が一様収束し, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ が各点収束する

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) \quad (F := \sum f_n \in C^1(I))$$

【証】 (1) のみを示す. $\{f_n\}, \{f'_n\}$ の極限関数をそれぞれ f, g とする. $\forall a, x_1 \in I$ に対して, $\{f'_n\}$ は $[a, x_1]$ (または $[x_1, a]$) 上で g に一様収束するので, 定理 2.3 (1) より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_1} f'_n(x) dx = \int_a^{x_1} g(x) dx.$$

一方, $\{f_n\}$ は I 上で f に収束するので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_1} f'_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_1) - f_n(a)) = f(x_1) - f(a)$$

よって, $f(x_1) - f(a) = \int_a^{x_1} g(x) dx$. x_1 で微分して, $f'(x) = g(x)$. □

定理 2.5 (Weierstrass の M テスト)

区間 I 上の関数項級数 $\sum f_n$ に対して,

$$\|f_n\|_\infty \leq M_n \quad (\forall n) \quad \text{かつ} \quad \sum M_n < \infty$$

を満たす数列 $\{M_n\}$ が存在すれば, $\sum f_n$ は I 上で一様収束する.

【証】 各 $x \in I$ において, $\sum |f_n(x)| \leq \sum M_n < \infty$ より, $\sum f_n(x)$ は絶対収束する.

$F_N := \sum_{n \leq N} f_n$ および $F := \sum f_n$ (極限関数) に対して,

$$|F_N(x) - F(x)| = \left| \sum_{n \geq N+1} f_n(x) \right| \leq \sum_{n \geq N+1} |f_n(x)| \leq \sum_{n \geq N+1} M_n.$$

$x \in I$ の任意性および $\sum M_n < \infty$ により,

$$\|F_N - F\|_\infty \leq \sum_{n \geq N+1} M_n \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

□

◆ 整級数への応用

定理 2.6 整級数 $\sum a_n x^n$ の収束半径を $r \in (0, \infty]$ とする:

$$r := \sup\{|x| \mid \sum a_n x^n \text{ が収束 } (x \in \mathbb{C})\} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(1) $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r$ で C^∞ 級.

(2) [項別微分]

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \quad (\text{収束半径} = r).$$

(3) [項別積分]

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n \quad (\text{収束半径} = r).$$

【証】 *Step 1.* まず, $f(x) = \sum a_n x^n$ の $|x| < r$ での連続性を示す. $r_1 \in (0, r)$ を任意に固定するとき, この整級数は仮定により $|x_0| \in (r_1, r)$ なる適当な x_0 で収束するから, $|a_n x_0^n| \leq M$ ($\forall n$) を満たす正数 M が存在し,

$$|x| \leq r_1 \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| r_1^n = |a_n x_0^n| \left(\frac{r_1}{|x_0|} \right)^n \leq M \left(\frac{r_1}{|x_0|} \right)^n.$$

$\sum (r_1/|x_0|)^n < \infty$ であるから, Weierstrass の M テストにより, $\sum a_n x^n$ は $|x| \leq r_1$ で一様収束する. 定理 2.2 (2) より, $f(x) = \sum a_n x^n$ は $|x| \leq r_1$ で連続, $r_1 < r$ の任意性により $|x| < r$ で連続となる.

Step 2. 再び $r_1 \in (0, r)$ を任意に固定する. 上の結果と定理 2.3 (2) より,

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| \leq r_1).$$

$r_1 < r$ の任意性により, この関係式は $|x| < r$ で成り立つ.

Step 3. $r_2 \in (0, r)$ を任意に固定し, $r_1 \in (r_2, r)$ をとる. $|x| \leq r_2$ のとき,

$$|na_n x^{n-1}| \leq n|a_n| r_2^{n-1} \leq \frac{n}{r_2} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \cdot |a_n| r_1^n \leq M' |a_n| r_1^n.$$

ここで, $n(r_2/r_1)^n \rightarrow 0$ より正数 M' がとれた. $\sum |a_n| r_1^n < \infty$ であつたから, Weierstrass の M テストにより, $\sum na_n x^{n-1}$ は $|x| \leq r_2$ で一様収束する. $\sum a_n x^n$ も $|x| \leq r_2$ で一様収束する (Step 1) ので, 定理 2.4 (2) を適用して,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad (|x| \leq r_2).$$

$r_2 < r$ の任意性により, この関係式は $|x| < r$ で成り立つ. これを繰り返すことにより, $f(x)$ が $|x| < r$ で C^∞ 級であることがわかる.

Step 4. $\sum na_n x^{n-1}, \sum a_n x^{n+1}/(n+1)$ の収束半径をそれぞれ r', r'' とすれば, 上の議論より $r' \geq r, r'' \geq r$. 逆に, $\sum a_n x^n$ は $\sum na_n x^{n-1}, \sum a_n x^{n+1}/(n+1)$ をそれぞれ項別積分 (定数 a_0 を足す), 項別微分したものと考えられるから, $r \geq r', r \geq r''$. 従つて, $r = r' = r''$. □

2 Fejér の定理

◆ Fourier 級数の基本問題

$$(S_N f)(t) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} \xrightarrow{?} f(t) \quad (N \rightarrow \infty)$$

ここで,

$$\begin{aligned} (S_N f)(t) &= \sum_{n=-N}^N \left(\int_{\mathbb{T}} f(s) e^{-ins} \, d\vec{s} \right) e^{int} = \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(t-s)} \right) f(s) \, d\vec{s} \\ &= \int_{\mathbb{T}} D_N(t-s) f(s) \, d\vec{s} = \int_{\mathbb{T}} D_N(s) f(t-s) \, d\vec{s}. \end{aligned}$$

$D_N(t) := \sum_{n=-N}^N e^{int}$ を Dirichlet 核と呼ぶ.

$$\begin{aligned}
 D_N(t) &= e^{-iNt} \cdot \frac{1 - (e^{it})^{2N+1}}{1 - e^{it}} \\
 &= e^{-iNt} \cdot \frac{e^{i(N+1/2)t}}{e^{it/2}} \cdot \frac{e^{i(N+1/2)t} - e^{-i(N+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\
 &= \boxed{\frac{\sin((N + 1/2)t)}{\sin(t/2)}}
 \end{aligned}$$

《注》 Dirichlet 核の正弦関数による表現式において, 分母が 0 となるときは
 極限值で置き換える. ($D_N(0) = 2N + 1$)

◆ Fejér の定理

$S_N f$ の収束を調べる前段として

$$(\sigma_N f)(t) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (S_n f)(t)$$

の収束を考える．ここで，

$$\begin{aligned} (\sigma_N f)(t) &= \frac{1}{N+1} \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=0}^N D_n(t-s) \right) f(s) \, d\vec{s} \\ &= \int_{\mathbb{T}} F_N(t-s) f(s) \, d\vec{s} = \int_{\mathbb{T}} F_N(s) f(t-s) \, d\vec{s}. \end{aligned}$$

$$F_N(t) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t) \text{ を Fejér 核と呼ぶ.}$$

【問 2.1】 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について

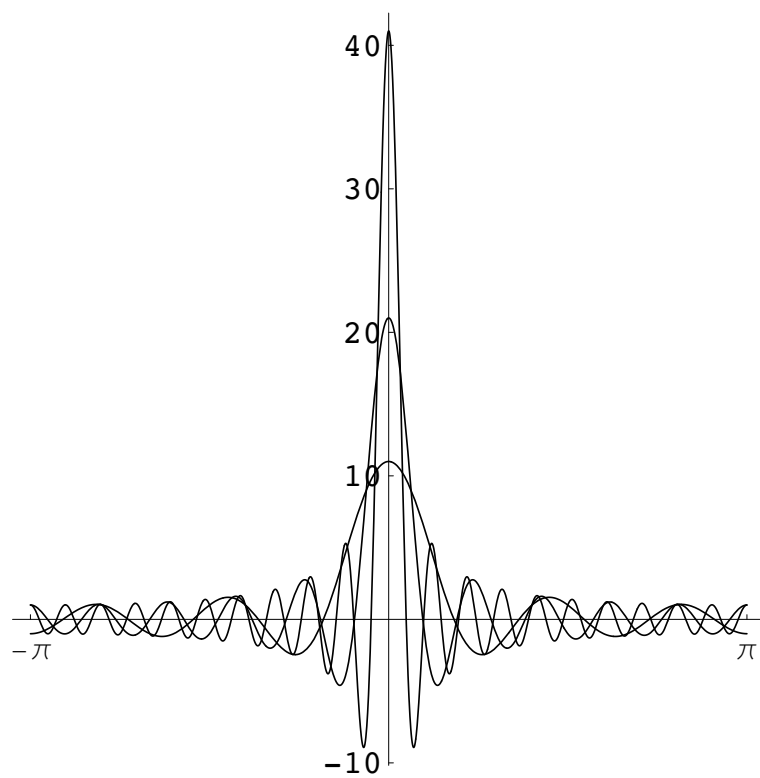
$$a_n \rightarrow \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N a_n \rightarrow \alpha \quad (\text{Cesàro 和})$$

を示せ. また, $\Leftarrow$ に対する反例を挙げよ.

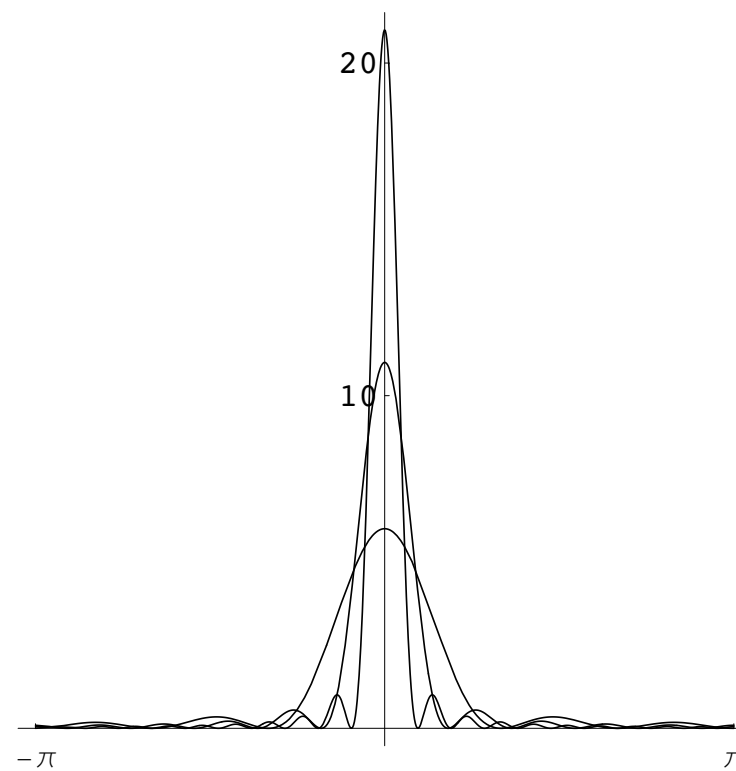
【問 2.2】* 次を示せ.

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N D_n(t) = \boxed{\frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{(N+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2}$$

(ヒント: $D_N(t)$ の表現式で $\sin(N + \frac{1}{2})t = \text{Im } e^{i(N + \frac{1}{2})t}$)



$D_N(t)$ のグラフ ($N = 5, 10, 20$)



$F_N(t)$ のグラフ ($N = 5, 10, 20$)

定理 2.7 (Fejér の定理)

$$f \in C(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sigma_N f \rightarrow f \quad (\text{一様収束})$$

従って, $f \in C(\mathbb{T})$ は Fourier 係数 $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ から復元される.

系 2.8 $f, g \in C(\mathbb{T})$ とする.

$$(1) \quad c_n(f) = c_n(g) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \Rightarrow \quad f = g$$

(2) 各 $\varepsilon > 0$ に対し, $\|p_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon$ を満たす三角多項式 p_ε が存在.

系 2.8 は定理 2.7 から容易に得られる. ($\sigma_N f$ は三角多項式!)

[証] (定理 2.7) — 証明法も重要

Step 1. まず, $F_N(t)$ は次の性質をもつことに注意:

- ① $F_N(t) \geq 0 \quad (t \in \mathbb{T}).$
- ② $\forall \delta \in (0, \pi)$ に対し, $\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_N(t) dt \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$
- ③ $\int_{\mathbb{T}} F_N(t) dt = 1.$

実際, ①は明らか. ②は

$$0 \leq F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{(N+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \leq \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \right)^2 \quad (\delta \leq |t| \leq \pi)$$

より容易にわかる. ③はもとの定義式に戻って

$$\int_{\mathbb{T}} F_N(t) dt = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \int_{\mathbb{T}} D_n(t) dt = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \int_{\mathbb{T}} e^{ikt} dt = 1.$$

Step 2. $f \in C(\mathbb{T})$ は $\mathbb{T}$ 上で一様連続, すなわち

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \forall t_1 \in \mathbb{T} : |t - t_1| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ を任意に固定し, $\delta > 0$ を上のように小さく選んでおく.

$$\begin{aligned} (\sigma_N f)(t_1) - f(t_1) &= \int_{\mathbb{T}} F_N(s) f(t_1 - s) \, d\vec{s} - f(t_1) \int_{\mathbb{T}} F_N(s) \, d\vec{s} \\ &= \left(\int_{|s| < \delta} + \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} \right) F_N(s) (f(t_1 - s) - f(t_1)) \, d\vec{s} \end{aligned}$$

において,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|s| < \delta} F_N(s) (f(t_1 - s) - f(t_1)) \, d\vec{s} \right| \\ &\leq \int_{|s| < \delta} F_N(s) |f(t_1 - s) - f(t_1)| \, d\vec{s} \leq \varepsilon \int_{\mathbb{T}} F_N(s) \, d\vec{s} = \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_N(s) (f(t_1 - s) - f(t_1)) \, ds \right| \leq 2\|f\|_\infty \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_N(s) \, ds.$$

これより,

$$|(\sigma_N f)(t_1) - f(t_1)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_N(s) \, ds.$$

更に N_1 を十分大きくとれば, $t_1 \in \mathbb{T}$ の任意性により,

$$N \geq N_1 \Rightarrow \|\sigma_N f - f\|_\infty \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

これは, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N f - f\|_\infty = 0$ (一様収束) を意味する.

□

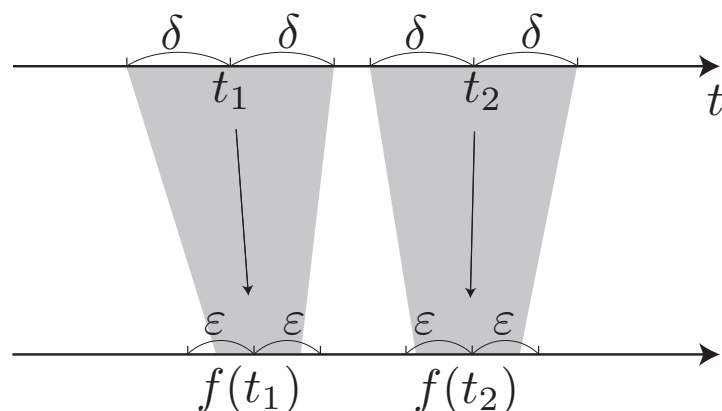
《注》 (連続と一様連続)

関数 f が区間 I 上で連続であるとする. これを “ ε - δ 論法” で述べれば,

$$\forall t_1 \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t \in I : |t - t_1| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$

特に I が有界閉区間ならば, f は I 上で一様連続, すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t_1 \in I \quad \forall t \in I : |t - t_1| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_1)| < \varepsilon.$$



(隣り合う $\forall$ 同士, あるいは $\exists$ 同士は交換可能であるが, $\forall$ と $\exists$ が隣り合うときは一般に交換は許されないことに注意.)

3 Dirichlet の定理

定理 2.9 (Dirichlet の定理)

$$f \in C^1(\mathbb{T}) \Rightarrow S_N f \rightarrow f \quad (\text{一様収束})$$

より精密化すると, $f \in C^k(\mathbb{T})$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき,

$$N^{k-1/2} \|S_N f - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

まず次の補題から始める.

補題 2.10

- (1) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$ は $\mathbb{T}$ 上の連続関数に一様収束
- (2) $f \in C(\mathbb{T}), \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < \infty \Rightarrow S_N f \rightarrow f$ (一様収束)

【証】 (1) は Weierstrass の M テストに他ならない.

(2) (1) により, $g(t) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int} \in C(\mathbb{T})$. このとき,

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{imt} \right) e^{-int} dt \\ &\stackrel{\text{定理 2.3}}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) \int_{\mathbb{T}} e^{i(m-n)t} dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) \delta_{mn} = c_n(f). \end{aligned}$$

系 2.8 (1) より $f = g$ であるから,

$$S_N f(t) = \sum_{|n| \leq N} c_n(f) e^{int} \xrightarrow{\text{一様収束}} g(t) = f(t). \quad \square$$

補題 2.11 (Bessel の不等式)

$$f \in PC(\mathbb{T}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2$$

《注》 証明は後で. 実は等号が成り立つ (Parseval の等式).

【証】 (定理 2.9)

補題 2.10, 2.11 を用いて証明する.

まず, $f \in C^1(\mathbb{T})$ ならば, 部分積分により,

$$\begin{aligned} inc_n(f) &= in \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-int} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[f(t) e^{-int} \right]_0^{2\pi} + \int_{\mathbb{T}} f'(t) e^{-int} dt = c_n(f'). \end{aligned}$$

よって, Schwarz の不等式, Bessel の不等式を用いて,

$$\begin{aligned}
 \sum_{|n| \leq N} |c_n(f)| &= |c_0(f)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \\
 &\leq |c_0(f)| + \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \|f\|_\infty + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \|f'\|_2 < \infty \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)
 \end{aligned}$$

となり, $S_N f$ が f に一様収束することがわかった.

次に, $N < N_1$ に対して,

$$\begin{aligned}
 |(S_N f)(t) - (S_{N_1} f)(t)| &= \left| \sum_{N < |n| \leq N_1} c_n(f) e^{int} \right| \\
 &\leq \sum_{N < |n| \leq N_1} |c_n(f)| \leq \sum_{N < |n| \leq N_1} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \\
 &\leq \left(\sum_{N < |n| \leq N_1} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{N < |n| \leq N_1} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\sum_{|n| > N} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

ここで $N_1 \rightarrow \infty$ として $\|S_N f - f\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{N}} \left(\sum_{|n| > N} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2}$.

更に, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2 = \|f'\|_2^2 < \infty$ であるから,

$$\sqrt{N} \|S_N f - f\|_{\infty} \leq \sqrt{2} \left(\sum_{|n|>N} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty).$$

$f \in C^k(\mathbb{T})$ の場合の主張も同様に示される.

□

【問 2.3】 定理 2.9 は $f \in C^1(\mathbb{T})$ を $f \in C(\mathbb{T}) \cap PC^1(\mathbb{T})$ に置き換えても成立することを示せ. (上の証明がすべて正当化されることをチェックする.)