【最初に読んで下さい】

- この解答例は個人の利用のみに限って下さい. (絶対に, 公開しないこと！ 公開したことが明らかになった場合, この科目の単位はないものと思って下さい.)
- 不適切な箇所に気付いたらお知らせ下さい (成績に反映させます). その都度更新していきます.

【問題 7.1】

2. (1) $y \neq 0$ の場合, $\displaystyle\int \frac{dy}{y}\,dx = \int x^2\,dx$ より, $\log|y| = \dfrac{x^3}{3} + c$. よって, $y = c_1 e^{\frac{x^3}{3}}$ $(c_1 = \pm e^c \neq 0)$. また, $y = 0$ (定数関数) は明らかに解. 2 つの場合を合わせて, 求める解は $y = c_1 e^{\frac{x^3}{3}}$ $(c_1 : 任意)$.
【注】正確を期して 2 つの場合に分けて議論したが, 最初の場合だけを調べて $y = c_1 e^{\frac{x^3}{3}}$ $(c_1 : 任意)$ と答えてもよいことにする. (以下同様)

(2) まず $y' = \bigl(2 - \dfrac{1}{x}\bigr)y$ と変形する. $y \neq 0$ の場合, $\displaystyle\int \frac{dy}{y}\,dx = \int \bigl(2 - \frac{1}{x}\bigr)\,dx$ より, $\log|y| = 2x - \log|x| + c$. よって, $y = \dfrac{c_1 e^{2x}}{x}$ $(c_1 = \pm e^c \neq 0)$. また, $y = 0$ は明らかに解. 2 つの場合を合わせて, 求める解は $y = \dfrac{c_1 e^{2x}}{x}$ $(c_1 : 任意)$.

(3) $y \neq 0$ の場合, $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \bigl(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\bigr)\,dx$ より, $\log|y| = \log\bigl|\dfrac{x}{x+1}\bigr| + c$. よって, $y = \dfrac{c_1 x}{x+1}$ $(c_1 = \pm e^c \neq 0)$. また, $y = 0$ は明らかに解. 2 つの場合を合わせて, 求める解は $y = \dfrac{c_1 x}{x+1}$ $(c_1 : 任意)$.

(4) $y \neq -1$ の場合, $\displaystyle\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{1-x}$ より, $\log|y+1| = -\log|1-x| + c$. よって, $y + 1 = \dfrac{c_1}{1-x}$, すなわち $y = \dfrac{c_1}{1-x} - 1$ $(c_1 = \pm e^c \neq 0)$. また, $y = -1$ は明らかに解. 2 つの場合を合わせて, 求める解は $y = \dfrac{c_1}{1-x} - 1$ $(c_1 : 任意)$.

(5) $y' - 2y = x - 1$ と変形して, 1 階線形微分方程式と見るのが素直 (非斉次な定数係数線形微分方程式でもある). しかし, ここでは解答例に倣い, $z = x + 2y - 1$ を未知関数と見て解いてみよう ($z = x + 2y$ とおいてもよい). このとき, $z' = 1 + 2y'$ であるから, z に対する微分方程式 $z' = 1 + 2z$ が得られる. $z \neq -\dfrac{1}{2}$ の場合, $\displaystyle\int \frac{dz}{1+2z} = \int dx$ より $\dfrac{1}{2}\log|1+2z| = x + c$. よって, $1 + 2z = c_1 e^{2x}$, すなわち $z = \dfrac{1}{2}(c_1 e^{2x} - 1)$ $(c_1 = \pm e^{2c} \neq 0)$. また, $z = -\dfrac{1}{2}$ は明らかに解. 2 つの場合を合わせて, $z' = 1 + 2z$ の解は $z = \dfrac{1}{2}(c_1 e^{2x} - 1)$ $(c_1 : 任意)$. 最後に, $y = \dfrac{1}{2}(z - x + 1)$ であったから, 求める解は $y = c_2 e^{2x} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ $(c_2 = \dfrac{c_1}{4} : 任意)$. 【問】1 階線形微分方程式と見て解け.

(6) $y' + 1 = (y + x)' = e^{x+y}$ であるから, $z = y + x$ とおいて $z' = e^z$. これより $\displaystyle\int e^{-z}\,dz = \int dx$ となって, $-e^{-z} = x + c$, すなわち $z = -\log(c_1 - x)$ $(c_1 = -c)$. ここで, $y = z - x$ であったから, 求める解は $y = -x - \log(c_1 - x)$ $(c_1 : 任意)$. 【注】言うまでもないことだが, 解となるこの関数の定義域 $x < c_1$ は定数 c_1 が指定されるごとに変化する.

3. ここに現れる問題はすべて同次形であるから, $y = xz$ とおけば, z に関する変数分離形の方程式となる. このとき, $y' = z + xz'$ であることに注意.

(1) 与えられた微分方程式は $z+xz'=-\dfrac{1}{z}-2$ と変形される．これを整理すると $xzz'=-(z+1)^2$. $z\neq -1$ の場合, $\displaystyle\int\frac{z}{(z+1)^2}\,dz=-\int\frac{dx}{x}$. 左辺の被積分関数は $\dfrac{z}{(z+1)^2}=\dfrac{(z+1)-1}{(z+1)^2}=\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{(z+1)^2}$ と部分分数分解できるので, $\log|z{+}1|+\dfrac{1}{z{+}1}=-\log|x|+c$ ($\Leftrightarrow$ $\log|x(z{+}1)|+\dfrac{1}{z{+}1}=c$). また, $z=-1$ は明らかに解. $z=\dfrac{y}{x}$ であったから, 求める解は $\log|x+y|+\dfrac{x}{x+y}=c$ (c : 任意), および $y=-x$. 【注】教科書の解答には $y=-x$ が落ちている.

(2) 与えられた微分方程式は $z+xz'=2-z$, すなわち $xz'=-2(z-1)$ と変形される．$z\neq 1$ の場合, $\displaystyle\int\frac{dz}{z-1}=-2\int\frac{dx}{x}$ より, $\log|z-1|=-2\log|x|+c$. よって, $z=1+\dfrac{c_1}{x^2}$ ($c_1=\pm e^c\neq 0$). また, $z=1$ は明らかに解. 2 つの場合を合わせて, $xz'=-2(z-1)$ の解は $z=1+\dfrac{c_1}{x^2}$ (c_1 : 任意). $z=\dfrac{y}{x}$ であったから, 求める解は $y=x+\dfrac{c_1}{x}$ (c_1 : 任意).

(3) 与えられた微分方程式は $z+xz'=\dfrac{1-z}{1+z}$, すなわち $x(z+1)z'=-(z^2+2z-1)$ と変形される．これより, $z^2+2z-1\neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $z\neq -1\pm\sqrt{2}$) の場合, $\displaystyle\int\frac{z+1}{z^2+2z-1}\,dz=-\int\frac{dx}{x}$. ここで $\dfrac{z+1}{z^2+2z-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{(z^2+2z-1)'}{z^2+2z-1}$ に注意して, $\dfrac{1}{2}\log|z^2+2z-1|=-\log|x|+c$, すなわち $z^2+2z-1=\dfrac{c_1}{x^2}$ ($c_1=\pm e^{2c}\neq 0$). また, $z=-1\pm\sqrt{2}$ は明らかに解. 2 つの場合を合わせて, $x(z+1)z'=-(z^2+2z-1)$ の解は $z^2+2z-1=\dfrac{c_1}{x^2}$ (c_1 : 任意). $z=\dfrac{y}{x}$ であったから, 求める解は $y^2+2xy-x^2=c_1$ (c_1 : 任意). 【注】 勿論, $y=-x\pm\sqrt{2x^2+c_1}$ と表してもよい.

(4) 与えられた微分方程式は $z+xz'=\dfrac{z^2-1}{z}$, すなわち $xzz'=-1$ と変形される．これより, $\displaystyle\int z\,dz=-\int\frac{dx}{x}$ であるから, $\dfrac{z^2}{2}=-\log|x|+c$, 従って $z^2=-2\log|x|+c_1$ ($c_1=2c$: 任意). $z=\dfrac{y}{x}$ であったから, 求める解は $y^2=x^2(c_1-2\log|x|)$ (c_1 : 任意). 【注】 $y=\pm x\sqrt{c_1-\log(x^2)}$ と表してもよい.

4. 1 階線形微分方程式 $y'+p(x)y=q(x)$ に対して, $P(x)=\displaystyle\int p(x)\,dx$ ($p(x)$ の不定積分を 1 つ固定) とおき, 微分方程式の両辺に $e^{P(x)}$ を掛ければ, $e^{P(x)}y'+e^{P(x)}p(x)y\ \big(=(e^{P(x)}y)'\big)=e^{P(x)}q(x)$. よって, $e^{P(x)}y=\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx+c$ となり, 一般解 $y=e^{-P(x)}\Big(\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx+c\Big)$ を得る.

Bernoulli（ベルヌーイ）の微分方程式 $y'+p(x)y=q(x)y^m$ ($m\geq 2$) については, $y=0$ が解であることは明らか. $y\neq 0$ のときは, まず両辺を y^m で割り, $y^{-m}y'+p(x)y^{1-m}=q(x)$. ここで, $(y^{1-m})'=(1-m)y^{-m}y'$ に注意して $z=y^{1-m}$ とおけば, 方程式は 1 階線形微分方程式 $\dfrac{z'}{1-m}+p(x)z=q(x)$ に変換される.

(1) $P(x)=\displaystyle\int(-1)\,dx=-x$, $\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int e^{-x}e^{2x}\,dx=\int e^x\,dx=e^x$ より, 一般解は $y=e^x(e^x+c)=e^{2x}+ce^x$ (c : 任意).

(2) $P(x)=\displaystyle\int\frac{-2}{x}\,dx=-2\log|x|=-\log(x^2)$, $\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int\frac{1}{x^2}(x+2)\,dx=\log|x|-\frac{2}{x}$ より, 一般解は $y=x^2\big(\log|x|-\dfrac{2}{x}+c\big)=x^2(\log|x|+c)-2x$ (c : 任意).

(3) $P(x)=\displaystyle\int 2x\,dx=x^2$, $\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}$ より, 一般解は $y=e^{-x^2}\big(\dfrac{1}{2}e^{x^2}+c\big)=\dfrac{1}{2}+ce^{-x^2}$ (c : 任意).

(4) まず, $y'-\dfrac{1}{x}y=1$ と変形する．このとき, $P(x)=\displaystyle\int\frac{-1}{x}\,dx=-\log|x|$ であるから, $x>0$ において $e^{-P(x)}=x$, $\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx=\int\frac{dx}{x}=\log x$. また $x<0$ において $e^{-P(x)}=-x$,

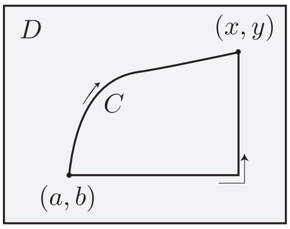
$\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int \frac{dx}{-x} = -\log(-x)$. 一般解は, $x>0$ において $y = x(\log x + c) = x\log x + cx$, $x<0$ において $y = (-x)(-\log(-x)+c) = x\log(-x) + (-c)x$. これらをまとめて表せば, $y = x\log|x| + cx$ (c : 任意).

(5) $y \neq 0$ の場合, $z = y^{1-2} = y^{-1}$ とおけば, 与えられた微分方程式は $\frac{z'}{-1} - z = x$, すなわち $z' + z = -x$ となる. $P(x) = \int dx = x$, $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int e^x(-x)\,dx = -xe^x + \int e^x\,dx = (1-x)e^x$ より, $z = e^{-x}\big((1-x)e^x + c\big) = 1 - x + ce^{-x}$. よって, $yz = 1$ より, $(1-x+ce^{-x})y = 1$. 一方, $y = 0$ は明らかに解. 従って, 求める解は, $y = 0$ および $y = \frac{1}{1-x+ce^{-x}}$ (c : 任意).

(6) $y \neq 0$ の場合, $z = y^{1-3} = y^{-2}$ とおけば, 与えられた微分方程式は $\frac{z'}{-2} - 2z = e^{2x}$, すなわち $z' + 4z = -2e^{2x}$ となる. $P(x) = \int 4\,dx = 4x$, $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int e^{4x}(-2e^{2x})\,dx = -\frac{1}{3}e^{6x}$ より, $z = e^{-4x}\big(-\frac{1}{3}e^{6x} + c\big) = -\frac{1}{3}e^{2x} + ce^{-4x}$. よって, $y^2 z = 1$ より, $\big(-\frac{1}{3}e^{2x} + ce^{-4x}\big)y^2 = 1$. ここで, 左辺の括弧内は正でなければならないので, そのような x の範囲が存在するために $c > 0$ と制限される. 一方, $y = 0$ は明らかに解. 従って, 求める解は, $y = 0$ および $\big(-\frac{1}{3}e^{2x} + ce^{-4x}\big)y^2 = 1$ ($c > 0$). 【注】 定数 c の範囲には余り気を使う必要はない (c は任意と考えてよい). 後者の式は $y^2 = \frac{3e^{4x}}{c_1 - e^{6x}}$ ($c_1 = 3c$) と表した方が見やすいかも知れない.

5. 長方形領域 D で C^1 級の関数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ に対して, 微分方程式

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \left(\Leftrightarrow\ \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\right)$$



を考える. これが完全微分形 (すなわち $P_y = Q_x$) であるとき, 点 $(a,b) \in D$ を任意に固定し

$$F(x,y) = \int_a^x P(\xi,b)\,d\xi + \int_b^y Q(x,\eta)\,d\eta \qquad (*)$$

とおけば, 一般解は $F(x,y) = c$ (c : 任意) で与えられる. 実は, この $F(x,y)$ は (a,b) から (x,y) に向かう任意の (区分的 C^1 級) 曲線 C に対して, C に沿った線積分 $F(x,y) = \int_C P\,dx + Q\,dy$ の形で表現される. この線積分が (a,b) から (x,y) に向かう曲線 C の取り方に依存しないことは, $P_y = Q_x$ と Green の定理により容易に示される.

(1) $P(x,y) = -x + y + 2$, $Q(x,y) = x - y + 1$ とおけば, $P_y(x,y) = 1 = Q_x(z,y)$ であるから, 与えられた微分方程式は完全微分形. ここで, $(a,b) = (0,0)$ として $(*)$ を計算すると,

$$F(x,y) = \int_0^x (-\xi + 2)\,d\xi + \int_0^y (x - \eta + 1)\,d\eta = -\frac{1}{2}(x-y)^2 + 2x + y.$$

よって, 一般解は $(x-y)^2 - 4x - 2y = c$ (c : 任意).

(2) $P(x,y) = e^x + 2xy + 2y^2$, $Q(x,y) = x^2 + 4xy + 3$ とおけば, $P_y(x,y) = 2x + 4y = Q_x(z,y)$ であるから, 与えられた微分方程式は完全微分形. ここで, $(a,b) = (0,0)$ として $(*)$ を計算すると,

$$F(x,y) = \int_0^x e^\xi\,d\xi + \int_0^y (x^2 + 2x\eta + 3)\,d\eta = e^x + 3y + x^2y + 2xy^2 - 1.$$

よって, 一般解は $e^x + 3y + x^2y + 2xy^2 = c$ (c : 任意).

(3) $P(x,y) = \sin y + 3x^2 - 1$, $Q(x,y) = x\cos y + 2y^3$ とおけば, $P_y(x,y) = \cos y = Q_x(z,y)$ である

から, 与えられた微分方程式は完全微分形. ここで, $(a,b)=(0,0)$ として $(*)$ を計算すると,

$$F(x,y)=\int_0^x (3\xi^2-1)\,d\xi+\int_0^y (x\cos\eta+2\eta^3)\,d\eta = x^3-x+\frac{1}{2}y^4+x\sin y.$$

よって, 一般解は $x^3-x+\frac{1}{2}y^4+x\sin y=c$ (c : 任意).

【問題 7.2】

1. それぞれの微分方程式の特性方程式を $F(t)$ で表す. また, $c_1, c_2, \ldots$ は任意の定数を表すとする.

(1) $F(t)=(t-2)(t+3)$ であるから, 一般解は $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$.

(2) $F(t)=(t-2)^2(t+1)$ であるから, 一般解は $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)e^{2x}$.

(3) $F(t)=(t^2+2t+2)(t+1)$ であり, $t^2+2t+2=0$ を解くと $t=-1\pm i$ であるから, 一般解は $y=(c_1+c_2\cos x+c_3\sin x)e^{-x}$.

(4) $F(t)=t^2+2t-3=(t-1)(t+3)$ であるから, 一般解は $y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$.

(5) $F(t)=t^3+3t^2+3t+1=(t+1)^3$ であるから, 一般解は $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{-x}$.

(6) $F(t)=t^3-3t^2+2t=t(t-1)(t-2)$ であるから, 一般解は $y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{2x}$.

2. 多項式 $F(t)$, 定数 $a\in\mathbb{C}$ に対して,

① $F(a)\neq 0$ なら $\dfrac{1}{F(D)}e^{ax}=\dfrac{1}{F(a)}e^{ax}$.

② $\dfrac{1}{F(D-a)}q(x)=e^{ax}\dfrac{1}{F(D)}(e^{-ax}q(x))$. 特に, $\dfrac{1}{D-a}q(x)=e^{ax}\dfrac{1}{D}(e^{-ax}q(x))=e^{ax}\displaystyle\int e^{-ax}q(x)\,dx$.

これらの事実はよく用いられる.

(1) $\dfrac{1}{D^2-D}e^{2x}=\dfrac{1}{2^2-2}e^{2x}=\dfrac{1}{2}e^{2x}$.

(2) $\dfrac{1}{D(D+1)}e^{-x}=\dfrac{1}{D+1}\left(\dfrac{1}{D}e^{-x}\right)=\dfrac{1}{D+1}\left(\dfrac{1}{-1}e^{-x}\right)=-\dfrac{1}{D+1}e^{-x}=-e^{-x}\dfrac{1}{D}(e^{x}e^{-x})=-e^{-x}\displaystyle\int dx=-xe^{-x}$.

(3) $\dfrac{1}{(D-1)(D-2)}xe^{x}=\dfrac{1}{D-1}\left(\dfrac{1}{D-2}xe^{x}\right)$ において, $\dfrac{1}{D-2}xe^{x}=e^{2x}\dfrac{1}{D}e^{-2x}(xe^{x})=e^{2x}\displaystyle\int xe^{-x}\,dx=e^{2x}\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx\right)=-(x+1)e^{x}$. よって, 《与式》$=-\dfrac{1}{D-1}\{(x+1)e^{x}\}=-e^{x}\dfrac{1}{D}\{e^{-x}\cdot(x+1)e^{x}\}=-e^{x}\displaystyle\int (x+1)\,dx=-\frac{1}{2}(x^2+2x)e^{x}$.

(4) $\dfrac{1}{D^2+2D-8}e^{2x}=\dfrac{1}{D-2}\left(\dfrac{1}{D+4}e^{2x}\right)=\dfrac{1}{D-2}\left(\dfrac{1}{2+4}e^{2x}\right)=\dfrac{1}{6}e^{2x}\dfrac{1}{D}(e^{-2x}e^{2x})=\dfrac{1}{6}xe^{2x}$.

(5) $\dfrac{1}{D(D-2)(D-3)}e^{2x}=\dfrac{1}{D-2}\left(\dfrac{1}{D(D-3)}e^{2x}\right)=\dfrac{1}{D-2}\left(\dfrac{1}{2(2-3)}e^{2x}\right)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{D-2}e^{2x}=-\dfrac{1}{2}e^{2x}\dfrac{1}{D}(e^{-2x}e^{2x})=-\dfrac{1}{2}xe^{2x}$.

(6) $\dfrac{1}{D-2}xe^{2x}=e^{2x}\dfrac{1}{D}(e^{-2x}\cdot xe^{2x})=e^{2x}\displaystyle\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

(7) $\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})$ に注意. $\dfrac{1}{D-1}e^{ix}=\dfrac{1}{i-1}e^{ix}=\dfrac{-1-i}{2}(\cos x+i\sin x)=\dfrac{1}{2}\{(-\cos x+\sin x)+i(-\cos x-\sin x)\}$. 虚部をとることにより, $\dfrac{1}{D-1}\sin x=-\dfrac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. **【注】** $a,b\in\mathbb{R}$ (少なくとも一方は 0 でない) に対して, $\dfrac{1}{a+ib}=\dfrac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ (分母の実数化).

(8) $\cos 2x = \mathrm{Re}(e^{2ix})$ に注意. $\dfrac{1}{(D-1)(D-2)}e^{2ix} = \dfrac{1}{(2i-1)(2i-2)}e^{ix} = \dfrac{1}{-2(1+3i)}e^{2ix} = -\dfrac{1-3i}{20}(\cos 2x + i\sin 2x) = -\dfrac{1}{20}\{(\cos 2x + 3\sin 2x) + i(-3\cos 2x + \sin 2x)\}$. 実部をとることにより, $\dfrac{1}{(D-1)(D-2)}\cos 2x = -\dfrac{1}{20}(\cos 2x + 3\sin 2x)$.

(9) $\dfrac{1}{D+1}(x^2+x-1) = \dfrac{1}{1-(-D)}(x^2+x-1) = \{1+(-D)+(-D)^2\}(x^2+x-1) = (1-D+D^2)(x^2+x-1) = (x^2+x-1)-(2x+1)+2 = x^2-x$.

(10) $\dfrac{1}{(D+1)(D-2)}(x^2-x) = \dfrac{1}{D+1}\Big(\dfrac{1}{D-2}(x^2-x)\Big)$ において, $\dfrac{1}{D-2}(x^2-x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-(D/2)}(x^2-x) = -\dfrac{1}{2}\big(1+\frac{1}{2}D+\frac{1}{4}D^2\big)(x^2-x) = -\dfrac{1}{2}\big\{(x^2-x)+\dfrac{1}{2}(2x-1)+\dfrac{2}{4}\big\} = -\dfrac{1}{2}x^2$. よって, 《与式》$= -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{D+1}x^2 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-(-D)}x^2 = -\dfrac{1}{2}(1-D+D^2)x^2 = -\dfrac{1}{2}(x^2-2x+2)$.

3. ① 斉次方程式の一般解, ② 非斉次方程式の特殊解, ③ 非斉次方程式の一般解, の順に計算を行う. (①, ② の順は問題でない)

(1) ① 特性多項式は $t(t+3)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y = c_1 + c_2e^{-3x}$. ② $\dfrac{1}{D(D+3)}e^{3x} = \dfrac{1}{3\cdot 6}e^{3x} = \dfrac{1}{18}e^{3x}$. また, $\dfrac{1}{D(D+3)}x = \dfrac{1}{D}\Big(\dfrac{1}{D+3}x\Big) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{D}\Big(\dfrac{1}{1-(-D/3)}x\Big) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{D}\Big(\big(1-\dfrac{1}{3}D\big)x\Big) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{D}\big(x-\dfrac{1}{3}\big) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\big(x-\frac{1}{3}\big)\,dx = \dfrac{1}{3}\big(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x\big) = \dfrac{1}{18}(3x^2-2x)$. これらを合わせて, $\dfrac{1}{D(D+3)}(e^{3x}+x) = \dfrac{1}{18}(e^{3x}+3x^2-2x)$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y = \dfrac{1}{18}(e^{3x}+3x^2-2x)+c_1+c_2e^{-3x}$ (c_1, c_2 : 任意).

(2) ① 特性多項式は $(t-1)(t-2)(t+3)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}$. ② $\dfrac{1}{(D-1)(D-2)(D+3)}e^x = \dfrac{1}{D-1}\Big(\dfrac{1}{(D-2)(D+3)}e^x\Big) = \dfrac{1}{D-1}\Big(\dfrac{1}{(1-2)(1+3)}e^x\Big) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{D-1}e^x = -\dfrac{1}{4}e^x\dfrac{1}{D}(e^{-x}e^x) = -\dfrac{1}{4}xe^x$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y = -\dfrac{1}{4}xe^x + c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}$ (c_1, c_2, c_3 : 任意).

(3) ① 特性多項式は $(t-2)(t+3)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$. ② $\dfrac{1}{(D-2)(D+3)}e^{ix} = \dfrac{1}{(i-2)(i+3)}e^{ix} = \dfrac{1}{-7+i}e^{ix} = -\dfrac{7+i}{50}(\cos x + i\sin x) = -\dfrac{1}{50}\{(7\cos x - \sin x) + i(\cos x + 7\sin x)\}$. 実部をとることにより, $\dfrac{1}{(D-2)(D+3)}\cos x = \dfrac{1}{50}(\sin x - 7\cos x)$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y = \dfrac{1}{50}(\sin x - 7\cos x) + c_1e^{2x} + c_2e^{-3x}$ (c_1, c_2 : 任意).

(4) ① 特性多項式は $t^3+t^2+t+1 = (t+1)(t^2+1)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x$. ② $\dfrac{1}{D^3+D^2+D+1}e^x = \dfrac{1}{1+1+1+1}e^x = \dfrac{1}{4}e^x$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y = \dfrac{1}{4}e^x + c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x$ (c_1, c_2, c_3 : 任意).

(5) ① 特性多項式は $t^2-2t-3 = (t+1)(t-3)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$. ② $\dfrac{1}{D^2-2D-3}e^{-x} = \dfrac{1}{D+1}\Big(\dfrac{1}{D-3}e^{-x}\Big) = \dfrac{1}{D+1}\Big(\dfrac{1}{-1-3}e^{-x}\Big) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{D+1}e^{-x} = -\dfrac{1}{4}e^{-x}\dfrac{1}{D}(e^xe^{-x}) = -\dfrac{1}{4}xe^{-x}$. また, $\dfrac{1}{D^2-2D-3}x = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-D(D-2)/3}x = -\dfrac{1}{3}\big(1+\dfrac{1}{3}D(D-2)\big)x = -\dfrac{1}{3}\big(x-\dfrac{2}{3}\big) = -\dfrac{1}{9}(3x-2)$. これらを合わせて $\dfrac{1}{D^2-2D-3}(e^{-x}+x) = -\dfrac{1}{9}(3x-2)-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y = -\dfrac{1}{9}(3x-2)+\big(c_1-\dfrac{1}{4}x\big)e^{-x}+c_2e^{3x}$ (c_1, c_2 : 任意).

(6) ① 特性多項式は $t^2-2t+1=(t-1)^2$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y=(c_1+c_2x)e^x$. ② $\dfrac{1}{(D-1)^2}e^x = e^x\dfrac{1}{D^2}(e^{-x}e^x) = \dfrac{1}{2}x^2e^x$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y=\big(c_1+c_2x+\dfrac{1}{2}x^2\big)e^x$ $(c_1,c_2:$ 任意$)$.

(7) ① 特性多項式は $t^3-5t^2+2t+8=(t+1)(t-2)(t-4)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{4x}$. ② $\dfrac{1}{D^3-5D^2+2D+8}(16x)=\dfrac{1}{1-(-1/8)(D^2-5D+2)D}(2x)=\big(1-\dfrac{1}{8}(D^2-5D+2)D\big)(2x) = 2x-\dfrac{1}{2}$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y=2x-\dfrac{1}{2}+c_1e^{-x}+c_2e^{2x}+c_3e^{4x}$ $(c_1,c_2,c_3:$ 任意$)$.

(8) ① 特性多項式は $t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$ であり, $t^2+t+1=0$ を解くと $t=\dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\,i)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y=c_1e^x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}+c_3e^{-\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}$. ② $\dfrac{1}{D^3-1}e^{2x}=\dfrac{1}{2^3-1}e^{2x}=\dfrac{1}{7}e^{2x}$. ③ よって, 与えられた微分方程式の一般解は, $y=\dfrac{1}{7}e^{2x}+c_1e^x+c_2e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}+c_3e^{-\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}$. $(c_1,c_2,c_3:$ 任意$)$.

4. ① 斉次方程式の一般解, ② 非斉次方程式の特殊解, ③ 非斉次方程式の一般解, ④ 初期値問題の解, の順に計算を行う.

(1) ① 特性多項式は $(t-2)(t+3)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$. ② $\dfrac{1}{(D-2)(D+3)}e^{3x}=\dfrac{1}{(3-2)(3+3)}e^{3x}=\dfrac{1}{6}e^{3x}$. ③ 非斉次方程式の一般解は, $y=\dfrac{1}{6}e^{3x}+c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}$. ④ $y(0)=\dfrac{1}{6}+c_1+c_2=1$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}+2c_1-3c_2=0$ を解いて, $c_1=\dfrac{2}{5}$, $c_2=\dfrac{13}{30}$. よって, 求める解は $y=\dfrac{1}{6}e^{3x}+\dfrac{2}{5}e^{2x}+\dfrac{13}{30}e^{-3x}$.

(2) ① 特性多項式は $t^2-2t-3=(t+1)(t-3)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$. ② $\dfrac{1}{D^2-2D-3}e^{-x}=\dfrac{1}{D+1}\Big(\dfrac{1}{D-3}e^{-x}\Big)=\dfrac{1}{D+1}\Big(\dfrac{1}{-1-3}e^{-x}\Big)=-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{D+1}e^{-x}=-\dfrac{1}{4}e^{-x}\dfrac{1}{D}(e^xe^{-x})=-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$. ③ 非斉次方程式の一般解は, $y=\big(c_1-\dfrac{1}{4}x\big)e^{-x}+c_2e^{3x}$. ④ $y(0)=c_1+c_2=0$, $y'(0)=-\dfrac{1}{4}-c_1+3c_2=0$ を解いて, $c_1=-\dfrac{1}{16}$, $c_2=\dfrac{1}{16}$. よって, 求める解は $y=-\dfrac{1}{16}(1+4x)e^{-x}+\dfrac{1}{16}e^{3x}$.

(3) ① 特性多項式は $t^2-t-2=(t+1)(t-2)$ であるから, 斉次方程式の一般解は $y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$. ② $\dfrac{1}{D^2-D-2}x=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}(D-1)D}x=-\dfrac{1}{2}\big(1+\dfrac{1}{2}(D-1)D\big)x=-\dfrac{1}{2}\big(x-\dfrac{1}{2}\big)=-\dfrac{1}{4}(2x-1)$. ③ 非斉次方程式の一般解は, $y=-\dfrac{1}{4}(2x-1)+c_1e^{-x}+c_2e^{2x}$. ④ $y(0)=\dfrac{1}{4}+c_1+c_2=0$, $y'(0)=-\dfrac{1}{2}-c_1+2c_2=0$ を解いて, $c_1=-\dfrac{2}{3}$, $c_2=\dfrac{5}{12}$. よって, 求める解は $y=-\dfrac{1}{4}(2x-1)-\dfrac{2}{3}e^{-x}+\dfrac{5}{12}e^{2x}$.