

【最初に読んで下さい】

- この解答例は個人の利用のみに限って下さい。(絶対に、公開しないこと！ 公開したことが明らかになった場合、この科目の単位はないものと思って下さい.)
- 不適切な箇所に気付いたらお知らせ下さい(成績に反映させます)。その都度更新していきます。
- 2021/12/03 問題 6.2 2 (4) の解答を修正しました (thanks to 原くん)。

【問題 6.1】

1. 定義により、級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは、部分和 $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ の作る数列 (部分和列) $\{A_n\}$ が収束すること。このとき、級数の和 ($= \{A_n\}$ の極限值) を A とすれば、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n - A_{n-1}) = A - A = 0.$$

2. $a_n > 0, b_n > 0$ であることに注意する。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば、 $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。よって、 $\{a_n\}$ は有界列であるから、すべての番号 n で $0 < a_n \leq C$ となるような定数 C が存在する (例えば $C = \sup_n a_n$)。このとき、 $0 < a_n^k = a_n \cdot a_n^{k-1} \leq C^{k-1} a_n$ となり、 $\sum_{n=1}^{\infty} C^{k-1} a_n = C^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するので、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ も収束する。

(2) (相乗平均) $\leq$ (相加平均) より、 $\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq (a_n + a_{n+1})/2$ 。ここで、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ であるから、 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})/2 = a_1/2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ は収束する。従って、 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ も収束する。

(3) まず、 $a_n b_n \leq (a_n^2 + b_n^2)/2$ 。ここで、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束するので、(1) の結果により、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ は収束する。よって、 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)/2$ も収束するので、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ も収束する。
【別法】 まず、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するので、 $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。よって、 $\{a_n\}$ は有界列であって、 $a_n \leq c$ を満たす定数 $c > 0$ が存在する。故に、 $a_n b_n \leq c b_n$ であり、 $\sum_{n=1}^{\infty} c b_n = c \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するので、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は収束する。

3. 級数の第 n 項を a_n と表す。(1), (2), (3) では e の数値が必要となる ($e = 2.718281828 \dots$)。

(1) $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1-n} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \left\{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right\}^{-1} \left(\frac{n-1}{n}\right) \rightarrow \frac{1}{e}$ ($n \rightarrow \infty$)。
 $0 < \frac{1}{e} < 1$ であるから、級数は収束する。

(2) $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n 2^{-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 2^{-1} \rightarrow \frac{e}{2}$ ($n \rightarrow \infty$)。 $\frac{e}{2} > 1$ であるから、級数は発散する。

(3) $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n e = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{-n} e = \left\{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^{-2} e \rightarrow \frac{1}{e}$ ($n \rightarrow \infty$)。 $0 < \frac{1}{e} < 1$ であるから、級数は収束する。

(4) $\sqrt[n]{a_n} = a^n b$ より、 $0 < a < 1$ なら $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)、 $a = 1$ なら $\sqrt[n]{a_n} = b$ 、 $a > 1$ なら $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$)。よって、 $(0 < a < 1)$ または $(a = 1 \text{ かつ } 0 < b < 1)$ のとき収束し、 $(a > 1)$ または $(a = 1 \text{ かつ } b \geq 1)$ のとき発散する。但し、 $a = b = 1$ のときは具体的な形 $a_n = 1$ を見て発散することが分かる。それ以外の場合は Cauchy の判定法により、収束、発散が判定できる。

4. 級数の第 n 項を a_n と表す。

(1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n!}{1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)。 $0 < 1$ より、級数は収束する。

(2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ ($n \rightarrow \infty$)。 $e > 1$ より、級数は発散する。

$$(3) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{n \sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \frac{2^n}{2^{n+1}} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty). \quad \frac{1}{2} < 1 \text{ より, 級数は収束する.}$$

$$(4) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(2(n+1))! (n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty). \quad \frac{1}{4} < 1 \text{ より, 級数は収束する.}$$

$$(5) \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(a+1)(2a+1) \cdots ((n+1)a+1)}{(b+1)(2b+1) \cdots ((n+1)b+1)} \frac{(b+1)(2b+1) \cdots (nb+1)}{(a+1)(2a+1) \cdots (na+1)} = \frac{(n+1)a+1}{(n+1)b+1} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (n \rightarrow \infty). \text{ よって, } a < b \text{ ならば級数は収束, } a \geq b \text{ ならば級数は発散する. 但し, } a = b \text{ のときは具体的な形 } a_n = 1 \text{ を見て発散することが分かる. それ以外の場合は D'Alembert の判定法により, 収束, 発散が判定できる.}$$

5. (1) $n \leq x \leq n+1$ のとき $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$ であるから, この区間で各辺を積分して, $f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1)$. 更に $1 \leq n \leq N-1$ に関して和をとることにより,

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n) \geq \int_1^N f(x) dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) = \sum_{n=2}^N f(n).$$

この不等式より, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束すれば (左側の不等号により) 広義積分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ が収束し, 逆に, 広義積分 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ が収束すれば (右側の不等号により) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ が収束することが分かる. (これを Euler-Maclaurin の判定法と呼ぶ.)

- (2) $a \leq 0$ のとき, $\frac{1}{n^a} \geq 1$ ($n \geq 1$) であるから級数は発散する. $a > 0$ のとき, $\frac{1}{x^a}$ が $x \geq 1$ 上の正值な単調減少関数であるから, 積分による判定法が使える. そこで, $a > 0$ の範囲で,

$$a \neq 1 \text{ なら, } \int_1^N \frac{dx}{x^a} = \left[\frac{x^{1-a}}{1-a} \right]_1^N = \frac{N^{1-a} - 1}{1-a} \rightarrow \begin{cases} \infty & (0 < a < 1) \\ \frac{1}{a-1} & (a > 1). \end{cases}$$

$$a = 1 \text{ なら, } \int_1^N \frac{dx}{x} = [\log x]_1^N = \log N \rightarrow \infty.$$

以上をまとめて, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ は $a > 1$ ならば収束し, $a \leq 1$ ならば発散する.

6. $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ において, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することを示せばよい. まず, $a_{2k-1} - a_{2k} \geq 0$, $-a_{2k} + a_{2k+1} \leq 0$ であることに注意して,

$$A_{2n} = a_1 - \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 0} - \underbrace{a_4 + a_5}_{\leq 0} - a_6 + \cdots - \underbrace{a_{2n} + a_{2n+1}}_{\leq 0} - \underbrace{a_{2n}}_{< 0} < a_1,$$

$$A_{2n} = A_{2n-2} + \underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{\geq 0} \geq A_{2n-2}.$$

$\{A_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増加列であるから収束する: $A_{2n} \rightarrow {}^3A$ ($n \rightarrow \infty$). また, $A_{2n+1} = A_{2n} + a_{2n+1} \rightarrow A + 0 = A$ ($n \rightarrow \infty$). よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ となり, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ が収束することが示された. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ については, $1 > \frac{1}{2} > \cdots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \cdots$ であるから, 上で収束を示したタイプの級数である. (実は $\log 2$ に収束する)

【問題 6.2】

1. 各問の整級数を $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と表す. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ または $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ が存在すれば, その逆数が収束半径 r を与える. 以下では, 一方の極限值だけを計算するが, 計算できる限りどちらの極限値を考えてもよい.

(1) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 \ (n \rightarrow \infty)$ より, 収束半径は $r = \frac{1}{1} = 1$.

(2) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow \infty \ (n \rightarrow \infty)$ より, 収束半径は $r = \frac{1}{\infty} = 0$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ のどちらも存在しないので注意が必要.

【方法 1】 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n$ は公比 $\frac{x^2}{2}$ の等比級数であるから, $\left| \frac{x^2}{2} \right| < 1$ のとき収束し, $\left| \frac{x^2}{2} \right| \geq 1$ のとき発散する. すなわち, $|x| < \sqrt{2}$ のとき収束し, $|x| \geq \sqrt{2}$ のとき発散する. よって, 定義により, 収束半径は $r = \sqrt{2}$.

【方法 2】 まず, $y = x^2$ において, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{2^n} \left(= \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \right)$ の収束半径 r_0 を求める. $\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{1}{2}$ であるから, $r_0 = \frac{1}{1/2} = 2$. 収束半径の定義により, これは $|x^2| < 2$ のとき収束し, $|x^2| > 2$ のとき発散することを意味する. すなわち, $|x| < \sqrt{2}$ のとき収束し, $|x| \geq \sqrt{2}$ のとき発散する. 従って, もとの級数の収束半径は $r = \sqrt{2}$.

(4) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e \ (n \rightarrow \infty)$ より, 収束半径は $r = \frac{1}{e}$.

(5) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ より, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \rightarrow 1 \ (n \rightarrow \infty)$. よって, 収束半径は $r = \frac{1}{1} = 1$.

(6) $\sqrt[n]{|a_n|} = |a|^n \rightarrow \begin{cases} 0 & (|a| < 1) \\ 1 & (|a| = 1) \\ \infty & (|a| > 1) \end{cases} \ (n \rightarrow \infty)$. よって, 収束半径は $|a| < 1$ のとき $r = \frac{1}{0} = \infty$ (分母の 0 は +0 で解釈), $|a| = 1$ のとき $r = \frac{1}{1} = 1$, $|a| > 1$ のとき $r = \frac{1}{\infty} = 0$.

(7) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow 1 \ (n \rightarrow \infty)$ より, 収束半径は $r = \frac{1}{1} = 1$.

(8) $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}^{-1} \rightarrow \frac{2}{e} \ (n \rightarrow \infty)$ より, 収束半径は $r = \frac{1}{2/e} = \frac{e}{2}$.

【追加問題 & 解答】 収束区間 (= $\mathbb{R}$ における収束域) を求めよ. 解答は以下の通り.

(1) $(-1, 1)$ (2) $\{0\}$ (3) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (4) $[-1/e, 1/e]$ (5) $[-1, 1]$

(6) $|a| < 1$ のとき $(-\infty, \infty)$ (= $\mathbb{R}$), $|a| = 1$ のとき $(-1, 1)$, $|a| > 1$ のとき $\{0\}$

(7) $[-1, 1]$ (8) $(-e/2, e/2)$

(4), (7), (8) は難しいので, キーとなる計算を書いておく. 但し, $n \rightarrow \infty$ において, $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \rightarrow \sqrt{\pi}$ (Wallis の公式), $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ (Stirling の公式) を用いた (ここで, $a_n \sim b_n \ (n \rightarrow \infty)$ は $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ を表す).

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left(\pm \frac{1}{e} \right)^n, a_n := \frac{n^n}{e^n n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \rightarrow 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{e} < 1$.

(7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (\pm 1)^n, a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \rightarrow 0, \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$.

(8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n^n} \left(\pm \frac{e}{2} \right)^n, a_n := \frac{(2n-1)!!}{n^n} \frac{e^n}{2^n} = \frac{(2n)!}{n^n (2n)!!} \frac{e^n}{2^n} = \frac{e^{2n} (2n)!}{(2n)^{2n} e^n n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{2}$.

2. 解答に先立ち, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$) のとき, $(1+x)^\alpha$ の整級数展開は一般二項係数

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

を用いて, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ (収束半径 = 1) と表されることに注意する. 収束区間 (= $\mathbb{R}$ における収束域) は $\alpha < -1$ のとき $-1 < x < 1$, $-1 < \alpha < 0$ のとき $-1 < x \leq 1$, $\alpha > 0$ のとき $-1 \leq x \leq 1$ となる.

$$(1) \sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n} \quad (|x| \leq 1). \quad \text{ここで, } n \geq 1 \text{ のとき, } \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdots(-\frac{2n-3}{2})}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}. \quad \text{よって, } \sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| \leq 1). \quad (\text{注: } (-1)!! = 0!! = 1 \text{ であるが, } (-2)!! \text{ は定義されない})$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} \quad (|x| \leq 1). \quad \text{ここで, } n \geq 0 \text{ のとき, } \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} = \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}. \quad \text{よって, } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (|x| \leq 1).$$

$$(3) \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \text{ であるから, (2) の整級数展開を 0 から } x \text{ まで積分することにより, } \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1).$$

$$(4) \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{x}{3}} \right) = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right\} x^n = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \right\} x^n \quad (-3 < x < 3).$$

$$(5) \text{ まず, } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1) \text{ を 0 から } x \text{ まで積分することにより, } \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad (-1 < x \leq 1). \quad \text{これより, } x \log(1+2x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{n} x^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2} 2^{n-1}}{n-1} x^n \quad (-2 < x \leq 2).$$

$$(6) \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1) \text{ を } x \text{ で微分して, } -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (n+1) x^n \quad (-1 < x < 1). \quad \text{よって, } \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad (-1 < x < 1).$$

【別法】 $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} x^n \quad (-1 < x < 1)$ において, $\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)\cdots(-n-1)}{n!} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} = (-1)^n (n+1)$ であるから, $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad (-1 < x < 1).$

$$(7) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} \right\} \quad (-\infty < x < \infty). \quad \text{記号 } [a] := (a \text{ 以下の最大整数}) \text{ を用いて } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{[n/2]}}{n!} x^n \text{ と表現してもよい.}$$

$$(8) (2) \text{ の計算より, } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad (-1 < x < 1). \quad \text{これを } (-1) \text{ 倍して 0 から } x \text{ まで積分すれば, } \cos^{-1} x - \frac{\pi}{2} = \int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad \text{故に, } \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

$$(9) (1+x)^{3/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3/2}{n} x^n \quad (-1 \leq x \leq 1) \text{ において, } \binom{3/2}{0} = 1, \binom{3/2}{1} = \frac{3}{2}, n \geq 2 \text{ のときは } \binom{3/2}{n} =$$

$$\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)\cdots(\frac{3}{2}-n+1)}{n!} = \frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\cdots(-\frac{2n-5}{2})}{n!} = \frac{3(-1)^{n-2}1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2^n n!} = \frac{3(-1)^n(2n-5)!!}{(2n)!!} \text{ であ}$$

$$\text{るから, } (1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(-1)^n(2n-5)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

3. (1) $f(x) = x^2 \log(1+x) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-2} x^n \quad (-1 < x \leq 1)$. これより, $n \leq 2$ のとき $f^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 3$ のとき $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

(2) $f(x) = (1+x)e^{x^2} = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} \quad (-\infty < x < \infty)$. これより, $f^{(2m)}(0) = \frac{(2m)!}{m!}$, $f^{(2m+1)}(0) = \frac{(2m+1)!}{m!}$.

(3) まず, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1)$ を 0 から $2x$ まで積分して, $\tan^{-1}(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$. これより, $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)}(0) = \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{2m+1} (2m+1)! = (-1)^m 2^{2m+1} (2m)! \left(= 2(-1)^m (4m)!! \right)$.

(4) $\frac{x^2}{x^2-x-2} = \frac{x^2}{(x-2)(x+1)} = \frac{x^2}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) = -\frac{x^2}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1-(x/2)} + \frac{1}{1+x} \right) = -\frac{x^2}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n - \frac{x^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right) x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{3} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + (-1)^n \right) x^n \quad (-1 < x < 1)$. これより, $f(0) = f'(0) = 0$, $n \geq 2$ のとき $f^{(n)}(0) = -\frac{n!}{3} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + (-1)^n \right)$.

4. (1) $t = x-1 \Leftrightarrow x = t+1$ とおけば, $\frac{x+1}{x^2+3x} = \frac{x+1}{x(x+3)} = \frac{t+2}{(t+1)(t+4)}$. ここで, $\frac{t+2}{(t+1)(t+4)}$ を部分分数分解するために $\frac{t+2}{(t+1)(t+4)} = \frac{a}{t+1} - \frac{b}{t+4}$ とおけば, $t+2 = a(t+4) - b(t+1)$ が t の恒等式となるので, $a-b=1$, $4a-b=2$. これを解いて $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}$. よって, $\frac{x+1}{x^2+3x} = \frac{1}{3} \frac{1}{t+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{t+4} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6} \left(2 + \frac{1}{4^n} \right) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6} \left(2 + \frac{1}{4^n} \right) (x-1)^n \quad (|x-1| < 1)$.

(2) $t = x - \frac{\pi}{3} \left(\Leftrightarrow x = t + \frac{\pi}{3} \right)$ とおけば, $\cos x = \cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos t - \sin \frac{\pi}{3} \sin t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{(2m)!} t^{2m} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} t^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^{2m} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^{2m+1} \quad (-\infty < x - \frac{\pi}{3} < \infty)$. これを $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - \frac{\pi}{3} \right)^n$ の形に表せば, $a_{2m} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^m}{(2m)!}$, $a_{2m+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}$.

5. $\tan \theta = \frac{1}{5} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ のとき, $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - (\frac{1}{5})^2} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$, $\tan 4\theta = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - (\frac{5}{12})^2} = \frac{120}{144-25} = \frac{120}{119}$, $\tan \left(4\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan 4\theta - 1}{1 + \tan 4\theta} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$. ここで, $\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ を用いれば, $\pi = 16\theta - 4 \left(4\theta - \frac{\pi}{4} \right) = 16 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{5} \right)^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{239} \right)^{2n+1}$ が成り立つ.

6. 級数 ① $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ② $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ について, 級数が絶対収束する $x \in \mathbb{R}$ 全体の集合をそれぞれ I_1, I_2 とし (整級数と絶対収束の性質によりともに 0 に関して左右対称な区間 $\neq \emptyset$ となる), 収束半径をそれぞれ $r_1, r_2 \in [0, \infty]$ とする. (教科書の解答例では r_1, r_2 を直接比べているが, 議論に不十分な箇所があるので, ここでは I_1, I_2 の関係を調べ, それを用いて $r_1 = r_2$ を示す.) 2つの場合に分けて議論する.

Case 1 ($I_1 \supsetneq \{0\}$ の場合) まず, $x_1 \in I_1 \setminus \{0\}$ とすれば, ① が $x = x_1$ で (絶対) 収束するので, $\{a_n x_1^n\}$ は (0 に収束する) 有界列となり, $|a_n x_1^n| \leq M \quad (\forall n)$ を満たす定数 $M > 0$ が存在する. このとき, $|x_0| < |x_1|$

を満たす任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, $|na_n x_0^{n-1}| = \frac{|a_n x_1^n|}{|x_1|} \cdot n \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1} \leq \frac{M}{|x_1|} \cdot n \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1}$ ($\forall n \geq 1$) であるから, $\sum_{n=1}^{\infty} n \left| \frac{x_0}{x_1} \right|^{n-1} = \frac{1}{(1 - |\frac{x_0}{x_1}|)^2} < \infty$ に注意して, ② が $x = x_0$ で絶対収束することが分かる.

ここまでの議論で $\mathring{I}_1 \subset I_2$ が示された ($\mathring{I}_1$ は I_1 の内部, すなわち I_1 の内点全体の集合を表す). 次に, $x_2 \in I_2$ とすれば, 容易な不等式 $|a_n x_2^n| \leq |x_2| |na_n x_2^{n-1}|$ ($\forall n \geq 1$) と ② が $x = x_2$ で絶対収束することから, ① も $x = x_2$ で絶対収束することが分かる. これで, $I_2 \subset I_1$ が示された. 以上より, $\mathring{I}_1 \subset I_2 \subset I_1$ となり, $\mathring{I}_1 = \mathring{I}_2$ が従う. 故に, $r_1 = \sup \mathring{I}_1 = \sup \mathring{I}_2 = r_2$ が結論される.

Case 2 ($I_1 = \{0\}$ の場合) Case 1 の後半の $I_2 \subset I_1$ を示した部分はこの場合にも通用するので, $I_1 = I_2 = \{0\}$ が導かれる. よって, $r_1 = r_2 = 0$ が従う.

【注意】 級数①の収束区間 (= ①が収束するような $x \in \mathbb{R}$ 全体の集合) を J_1 とすれば, 一般に $\mathring{J}_1 \subset I_1 \subset J_1$ が成り立つ. 特に, ①の収束半径 r_1 が $0 < r_1 < \infty$ を満たすとき, $(-r_1, r_1) \subset I_1 \subset J_1 \subset [-r_1, r_1]$ が成り立つ. なお, このとき, J_1 は $(-r_1, r_1), [-r_1, r_1), (-r_1, r_1], [-r_1, r_1]$ のいずれかの形をとり, I_1 は $(-r_1, r_1), [-r_1, r_1]$ のどちらか一方である.