$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 《期末試験》

2020. 2. 14 (Fri) 1 or 2 限 実施

$\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ にある 16 問のうちの 11 問 (以上) および $\boxed{6}$ に答えよ.
どういう順序で解答してもよい. 結果のみでなく, 計算の過程も書くこと.

$\boxed{1}$ 次の重積分あるいは 3 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} (x-y)^2\, dxdy,\qquad D_1 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1.$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \cos(2x+y)\, dxdy,\qquad D_2 : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

(3) $\displaystyle\iint_{D_3} x e^{-y^2}\, dxdy,\qquad D_3 : x^2 \leqslant y \leqslant 1,\ x \geqslant 0$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_4} z^2\, dxdydz,\qquad D_4 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1.$

$\boxed{2}$ 適当な変数変換を行うことにより, 次の重積分あるいは 3 重積分を計算せよ.

(5) $\displaystyle\iint_{E_1} x^2 y\, dxdy,\qquad E_1 :\ 0 \leqslant x \leqslant y,\ x^2+y^2 \leqslant 1.$

(6) $\displaystyle\iint_{E_2} \frac{(2x-y)^2}{1+(x+y)^4}\, dxdy,\qquad E_2 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1.$

(7) $\displaystyle\iint_{E_3} y\, dxdy,$ E_3 : 曲線 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ と x 軸が囲む部分.

(8) $\displaystyle\iiint_{E_4} \frac{xy e^{-x^2-y^2-z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dxdydz,\qquad E_4 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ (x,y,z) \neq (0,0,0).$

$\boxed{3}$ 次の線積分を計算せよ. 但し, (9) は弧長に関する線積分を表す.

(9) $\displaystyle\int_{C_1} x^2 y\, ds,$ C_1 : 点 $(1,0)$ から点 $(0,1)$ に向かう線分.

(10) $\displaystyle\int_{C_2} (e^x + y^3)\, dx - x^3\, dy,$ C_2 : $x^2+y^2 = 1$ (正の向きに 1 周).

$\boxed{4}$ 次の体積を求めよ.

(11) 2 つの放物面 $z = x^2+y^2$ と $z = 2x - x^2 - y^2$ で囲まれた部分の体積 V_1.

(12) 円錐面 $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ と xy 平面で囲まれた部分と, 円柱 $x^2+y^2 \leqslant x$ の共通部分の体積 V_2.

(13) 空間の極座標 (r, θ, φ) で表された曲面 $r = 1 - \cos\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ で囲まれた部分のうちで xy 平面より上にある部分の体積 V_3.

$\boxed{5}$ 次の面積を求めよ.

(14) 平面曲線 $(x^2+y^2)^2 = 2xy$ が囲む部分のうちで $x \geqslant 0$ の側にある部分の面積 S_1.

(15) 半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ のうちで 円柱面 $x^2+y^2 = x$ の内側にある部分の面積 S_2.

(16) 地球を半径 $R > 0$ の球と見なしたとき, 北緯 0 度から 60 度, かつ東経 0 度から 45 度の範囲にある地表面の面積 S_3.

$\boxed{6}$ 関数 $f(x,y) = x + \dfrac{1}{3}y^3$, $g(x,y) = x^2 - y^2 + \dfrac{3}{2}$ について, 次の問いに答えよ.

(i) 曲線 $g(x,y) = 0$ 上の点のうちで, 条件「この点のまわりで $g(x,y) = 0$ が $\underline{x = \psi(y)}$ の形の陰関数をもつ」を <u>満たさない</u> ものは存在するか? 存在するならそれらをすべて書き出し, 存在しないなら「存在しない」と記せ.

(ii) 曲線 $g(x,y) = 0$ 上の点 (a,b) が (i) の条件を <u>満たす</u> とき, 陰関数 $\psi(y)$ の $y = b$ における漸近展開

$$\psi(y) = c_0 + c_1(y-b) + c_2(y-b)^2 + o((y-b)^2) \quad (y \to b)$$

の係数 c_0, c_1, c_2 を a, b の有理式 $\left(= \frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}\right)$ で表せ.

(iii) 点 (x,y) が曲線 $g(x,y) = 0$ 上を動くとき, $f(x,y)$ の極値を考える. Lagrange の未定乗数法によって与えられる <u>極値をとる点の候補</u> をすべて挙げよ.

(iv) (iii) で求めた各点に対して, その点で極値をとるかどうかを調べよ. ただし, 「点 (a,b) で極大値 c をとる」「点 (a,b) で極小値 c をとる」「極値をとらない」という形式で答えること.

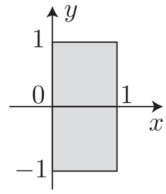
微分積分学第二 《期末試験》 【解答例】

2020. 2. 14 (Fri) 1 or 2 限 実施

1 【(1)–(16) の配点】 各 7 点 (11 問より多く解答した場合は点数のよい方から 11 問の点数を合計)

(1) $《与式》= \displaystyle\int_0^1 dx \int_{-1}^1 (x-y)^2\,dy = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 (x^2-2xy+y^2)\,dy$

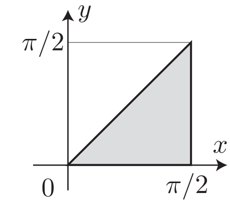
$\displaystyle = 2\int_0^1 dx\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy = 2\int_0^1\Big(x^2+\frac{1}{3}\Big)dx = 2\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Big) = \boxed{\frac{4}{3}}.$



2 番目の等号は x^2, y^2 が y について偶関数, xy が y について奇関数であることによる.
勿論, 展開せずに直接積分してもよい.

(2) $《与式》= \displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(2x+y)\,dy = \int_0^{\pi/2}\Big[\sin(2x+y)\Big]_{y=0}^{y=x} dx$

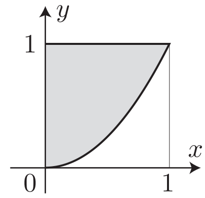
$\displaystyle = \int_0^{\pi/2}(\sin 3x - \sin 2x)\,dx = \Big[-\frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 2x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - 1 = \boxed{-\frac{2}{3}}.$



勿論, 加法定理で展開してから積分してもよい.

(3) $《与式》= \displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xe^{-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2}\,dx = \int_0^1\Big[\frac{1}{2}x^2e^{-y^2}\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx$

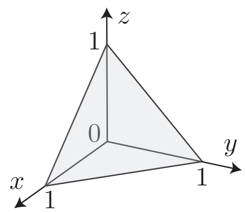
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{e}\Big)}.$



(4) $《与式》= \displaystyle\iiint_{\substack{x+y+z\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} z^2\,dxdydz = \iint_{\substack{x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} dxdy\int_0^{1-x-y} z^2\,dz$

$\displaystyle = \iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1-x\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} \frac{1}{3}(1-x-y)^3\,dxdy = \frac{1}{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^3\,dy$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int_0^1\Big[-\frac{1}{4}(1-x-y)^4\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{12}\int_0^1 (1-x)^4\,dx = \boxed{\frac{1}{60}}.$



【別法】 $D(z) = \{(x,y) \mid x+y \leqslant 1-z,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ とおけば,

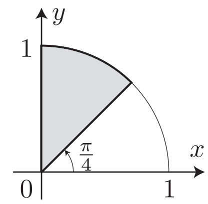
$$《与式》= \iiint_{\substack{x+y+z\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} z^2\,dxdydz = \int_0^1 dz\iint_{D(z)} z^2\,dxdy = \int_0^1 z^2\cdot(D(z)\text{ の面積})\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 z^2(1-z)^2\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (z^2-2z^3+z^4)\,dz = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\Big) = \boxed{\frac{1}{60}}.$$

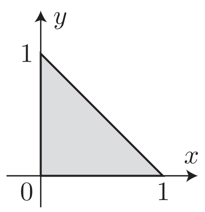
2 (5) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ (平面の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. この変数変換により E_1 は $0\leqslant r\leqslant 1$, $\pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2$ に対応するから,

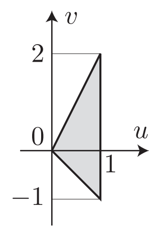
$$《与式》= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ \pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta = \Big(\int_0^1 r^4\,dr\Big)\Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\Big)$$

$$= \Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1\cdot\Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^3 = \boxed{\frac{1}{30\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{60}}.$$



(6) $u = x+y,\ v = 2x-y$ とおけば, $x = \dfrac{u+v}{3},\ y = \dfrac{2u-v}{3}$,
$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{vmatrix} = -\dfrac{1}{3}$. このとき E_2 は $0\leqslant u\leqslant 1$,
$-u\leqslant v\leqslant 2u$ に対応する (三角形の頂点に注目せよ) から,

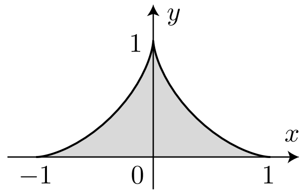




$$
\text{《与式》} = \iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ -u\leqslant v\leqslant 2u}} \frac{v^2}{1+u^4}\cdot\frac{1}{3}\,dudv = \frac{1}{3}\int_0^1 du\int_{-u}^{2u}\frac{v^2}{1+u^4}\,dv
$$

$$
= \frac{1}{3}\int_0^1\left[\frac{1}{3}\frac{v^3}{1+u^4}\right]_{v=-u}^{v=2u}du = \frac{1}{9}\int_0^1\frac{9u^3}{1+u^4}\,du = \left[\frac{1}{4}\log(1+u^4)\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}\log 2}.
$$

(7) この曲線 (astroid の一部) を $y=f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ と表せば,



$$
\text{《与式》} = \int_{-1}^1 dx\int_0^{f(x)} y\,dy = \int_{-1}^1\frac{f(x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_\pi^0 y^2\,\frac{dx}{dt}\,dt
$$

$$
= \frac{1}{2}\int_\pi^0(\sin^3 t)^2\cdot(-3\cos^2 t\sin t)\,dt = \frac{3}{2}\int_0^\pi\cos^2 t\,\sin^7 t\,dt
$$

$$
= 3\int_0^{\pi/2}(\sin^7 t-\sin^9 t)\,dt = 3\left(1-\frac{8}{9}\right)\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3} = \boxed{\frac{16}{105}}.
$$

【別法】 $x=s\cos^3 t,\ y=s\sin^3 t$ $(0\leqslant s\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant\pi)$ で変数変換する. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=3s\cos^2 t\sin^2 t$ より,

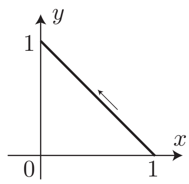
$$
\text{《与式》} = \iint_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant\pi}} s\sin^3 t\cdot 3s\cos^2 t\sin^2 t\,dsdt = \left(\int_0^1 3s^2\,ds\right)\left(\int_0^\pi\cos^2 t\sin^5 t\,dt\right) = \boxed{\frac{16}{105}}.
$$

(8) $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ (空間の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$. この変数変換により E_4 は $0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ に対応するから,

$$
\text{《与式》} = \iiint_{\substack{0\leqslant r<\infty\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}}\frac{(r\sin\theta\cos\varphi)(r\sin\theta\sin\varphi)\,e^{-r^2}}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi
$$

$$
= \left(\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,d\varphi\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(2\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{3}}.
$$

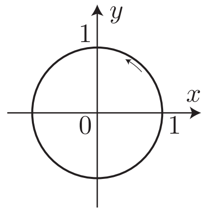
3 (9) 有向線分 C_1 は $x=x(t):=1-t,\ y=y(t):=t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ とパラメータ表示される. よって,



$$
\text{《与式》} = \int_0^1 x(t)^2y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt = \int_0^1(1-t)^2t\cdot\sqrt{2}\,dt
$$

$$
= \sqrt{2}\int_0^1(t-2t^2+t^3)\,dt = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{6\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{12}}.
$$

(10) 曲線 C_2 で囲まれた閉領域 $x^2+y^2\leqslant 1$ を D と表せば, $e^x+y^3,\ -x^3$ はともに D 上で C^1 級であるから, Green の定理により



$$
\text{《与式》} = \iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-x^3)-\frac{\partial}{\partial y}(e^x+y^3)\right\}dxdy = -3\iint_D(x^2+y^2)\,dxdy
$$

右辺の積分を極座標変換して,

$$
= -3\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} r^2\cdot r\,drd\theta = -3\cdot2\pi\int_0^1 r^3\,dr = \boxed{-\frac{3\pi}{2}}.
$$

【別法】 曲線 C_2 は $x=x(t):=\cos t,\ y=y(t):=\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ と媒介変数表示されるので,

$$
\text{《与式》} = \int_0^{2\pi}\{(e^{x(t)}+y(t)^3)x'(t)-x(t)^3y'(t)\}\,dt = \int_0^{2\pi}\{(e^{\cos t})'-(\sin^4 t+\cos^4 t)\}\,dt.
$$

ここで, $\sin^4 t+\cos^4 t=(\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\cos^2 t\sin^2 t=1-\frac{1}{2}\sin^2 2t=\frac{1}{4}(3+\cos 4t)$ であるから,

$$
\text{《与式》} = \left[e^{\cos t}-\frac{1}{4}\left(3t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)\right]_0^{2\pi} = \boxed{-\frac{3\pi}{2}}.
$$

4 (11) 2 曲面の交線は $z = x^2 + y^2 = 2x - x^2 - y^2$ と表される．これより，x, y のみの関係式 $x^2 + y^2 = x$ (交線を xy 平面に正射影した図形，ここでは中心 $(1/2, 0)$，半径 $1/2$ の円) が得られる．よって，考えている部分は閉領域 $x^2 + y^2 \leqslant x$ ($\Leftrightarrow$ $(x - 1/2)^2 + y^2 \leqslant (1/2)^2$) 上で定義された 2 つの関数 $z = x^2 + y^2$, $z = 2x - x^2 - y^2$ のグラフで挟まれた部分である (右下図)．従って，

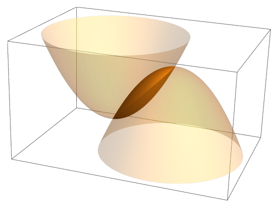
$$V_1 = \iiint_{\substack{x^2+y^2\leqslant x \\ x^2+y^2\leqslant z\leqslant 2x-x^2-y^2}} dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leqslant x} \{(2x - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)\}\, dxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant x} 2(x - x^2 - y^2)\, dxdy = 2\iint_{(x-1/2)^2+y^2\leqslant(1/2)^2} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2\right\} dxdy.$$

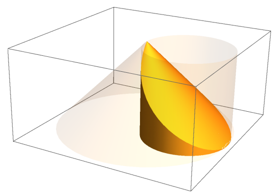
ここで，点 $(1/2, 0)$ を中心とする極座標 (r, θ) を用いて，$x - 1/2 = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変換すれば，

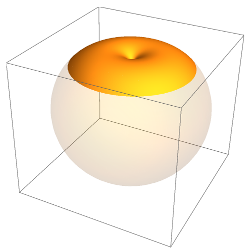
$$V_1 = 2\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1/2 \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} \left(\frac{1}{4} - r^2\right)\cdot r\, drd\theta = \left(\int_0^{1/2}\left(\frac{r}{2} - 2r^3\right)dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \boxed{\frac{\pi}{16}}.$$

あるいは，通常の極座標 (r, θ) を用いて，$x^2 + y^2 = x$ が $r = \cos\theta$ $(-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ と表されるので，

$$V_1 = 2\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\cos\theta \\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} (r\cos\theta - r^2)\, r\, drd\theta = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{12}\cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \boxed{\frac{\pi}{16}}.$$







(12) 考えている部分は閉領域 $x^2 + y^2 \leqslant x$ 上で定義された 2 つの関数 $z = 0$, $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ のグラフで挟まれた部分であるから，その体積は

$$V_2 = \iiint_{\substack{x^2+y^2\leqslant x \\ 0\leqslant z\leqslant 1-(x^2+y^2)}} dxdydz = \iint_{x^2+y^2\leqslant x} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}\,)\, dxdy$$

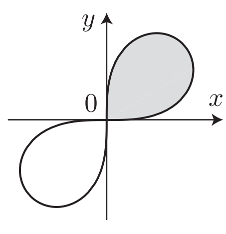
$x^2 + y^2 \leqslant x$ は極座標を用いて $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ と表されるから，

$$= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\cos\theta \\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} (1 - r)r\, drd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos^3\theta}{3}\right) d\theta = \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}}.$$

(13) 考えている空間図形を D と表せば，空間の極座標変換を用いて，

$$V_3 = \iiint_D dxdydz = \iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1-\cos\theta \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2 \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$
$$= \left(\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1-\cos\theta \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} r^2\sin\theta\, drd\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = 2\pi\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{1-\cos\theta} r^2\sin\theta\, dr$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3}(1 - \cos\theta)^3\sin\theta\, d\theta \overset{\cos\theta = u}{=} \frac{2\pi}{3}\int_0^1 (1 - u)^3\, du = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

5 (14) この曲線を平面の極座標 (r, θ) で表せば $(r^2)^2 = 2(r\cos\theta)(r\sin\theta) = r^2\sin 2\theta$，すなわち $r = \sqrt{\sin 2\theta}$, $\sin 2\theta \geqslant 0$．$x \geqslant 0$ の範囲では $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ であるから，曲線は $r = \sqrt{\sin 2\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ と表される．考えているのはこの曲線が囲む部分であるから，その面積は



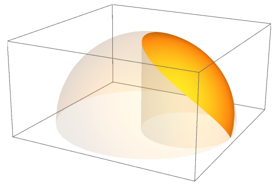
$$S_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\sin 2\theta}\,\right)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\, d\theta = \left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

(15) 考えている部分は (平面の) 閉領域 $x^2 + y^2 \leqslant x$ 上で定義された関数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフである．ここで，

$$\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

であるから, 求める面積は極座標変換を用いることにより,

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \iint_{x^2+y^2\leqslant x} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\cos\theta\\ -\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} \frac{r\,drd\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[-\sqrt{1-r^2}\,\Big]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-|\sin\theta|\,)\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}(1-\sin\theta)\,d\theta = \boxed{\pi-2}.
\end{aligned}
$$

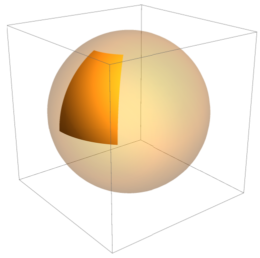


(16) 考えている地表面の部分は $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{bmatrix}$ $(\pi/6\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4)$ と表される. このとき,

$$
\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = R^2\sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right| = R^2\sin\theta
$$

であるから, 求める面積は

$$
\begin{aligned}
S_3 &= \iint_{\substack{\pi/6\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/4}} \left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right| d\theta d\varphi = \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} R^2\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/4} d\theta\right) \\
&= \frac{\pi R^2}{4}\Big[-\cos\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}\pi R^2}.
\end{aligned}
$$



6 【配点】 $3+6+6+8=23$ 点

(i) 点 (a,b) が曲線 $g(x,y)=0$ 上にあるとき, $g_x(a,b)=2a\neq0$ であれば, この点の近傍で $g(x,y)=0$ は $x=\psi(y)$ の形の陰関数をもつ. よって, この形の陰関数をもたないなら, $a=0$, $g(0,b)=-b^2+\frac{3}{2}=0$ より $(a,b)=\boxed{\left(0,\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}$. (これらの点の近傍では $g(x,y)=0$ は $y=\pm\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}$ と表され, 確かに $x=\psi(y)$ の形の陰関数はもち得ない.)

(ii) $x^2-y^2+\frac{3}{2}=0$ $(x=\psi(y))$ を y で微分する ($'=\frac{d}{dy}$).

- 1 回微分して, $xx'-y=0$ (2 で割った). よって, $x'=\dfrac{y}{x}$ となり, $\psi'(b)=\dfrac{b}{a}$.
- もう 1 回微分して, $(x')^2+xx''-1=0$. よって,

$$
x''=\frac{1-(x')^2}{x}=\frac{1-(y/x)^2}{x}=\frac{x^2-y^2}{x^3}=-\frac{3}{2x^3}. \quad これより, \ \psi''(b)=\frac{a^2-b^2}{a^3}=-\frac{3}{2a^3}.
$$

従って, $\psi(y)$ の $y=b$ における漸近展開の係数は

$$
c_0=\psi(b)=\boxed{a}, \quad c_1=\psi'(b)=\boxed{\frac{b}{a}}, \quad c_2=\frac{1}{2}\psi''(b)=\boxed{-\frac{3}{4a^3}}.
$$

(iii) $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=x+\frac{1}{3}y^3-\lambda(x^2-y^2+\frac{3}{2})$ とおいて,

$$
\begin{cases} F_x = 1-2\lambda x = 0 \\ F_y = y^2+2\lambda y = 0 \\ F_\lambda = -(x^2-y^2+\frac{3}{2}) = 0 \end{cases}
$$

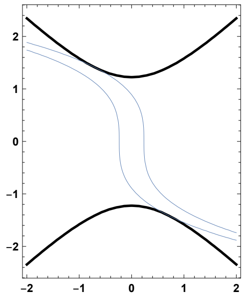
を解くことで極値を与える点の候補が得られる. まず, 第 2 式より $y(y+2\lambda)=0$. 第 3 式より $y=0$ とはなり得ないので, $y=-2\lambda$ $(\neq0)$. また, 第 1 式より $x=1/2\lambda$. これらを第 3 式に代入して整理すれば,

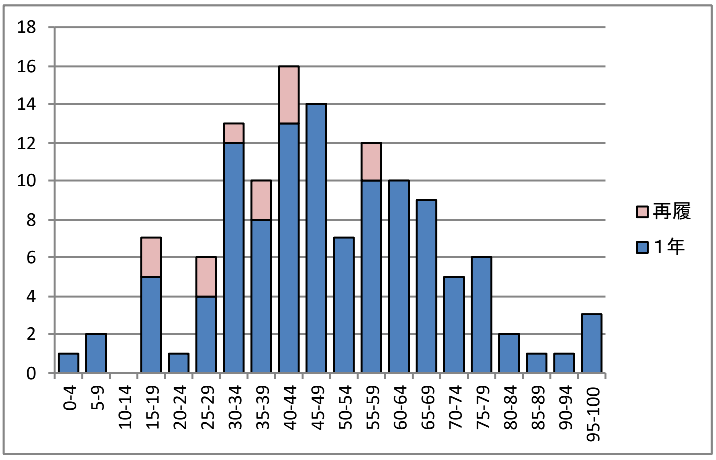
$$
16\lambda^4-6\lambda^2-1=(8\lambda^2+1)(2\lambda^2-1)=0. \quad \therefore \lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.
$$

よって, $(x,y,\lambda)=(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\mp\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ が解となり, 極値を与える点の候補は $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)}$.

(iv) 上で選んだ点 (a,b) の近傍で定まる陰関数 $x=\psi(y)$ を用いて $h(y):=\psi(y)+\frac{1}{3}y^3$ と定め, $h(y)$ が $x=b$ で極値 (極大値 or 極小値) をとるか調べればよい. $h'(y)=\psi'(y)+y^2$, $h''(x)=\psi''(y)+2y$ に注意して,

- 点 $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2})$ において： $\psi(-\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\psi'(-\sqrt{2}) = -2$, $\psi''(-\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$ より， $h(-\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{6}$, $h'(-\sqrt{2}) = 0$, $h''(-\sqrt{2}) = -5\sqrt{2} < 0$. よって, $\boxed{\text{点 } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) \text{ で極大値 } -\frac{\sqrt{2}}{6}}$ をとる.
- 点 $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ において: $\psi(\sqrt{2}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\psi'(\sqrt{2}) = -2$, $\psi''(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$ より， $h(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{6}$, $h'(\sqrt{2}) = 0$, $h''(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2} > 0$. よって, $\boxed{\text{点 } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) \text{ で極小値 } \frac{\sqrt{2}}{6}}$ をとる.





	人 数	平均点	標準偏差	最高点
クラス 4	57	51.4	18.9	100
クラス 6	57	49.6	19.9	95
1 年合計	114	50.5	19.4	100
再履	12	36.3	12.4	59