$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 【中間試験】

2019. 12. 13 (Fri) 実施

— 答だけでなく本質的な計算過程は残して下さい, 解答する順序は問いません —

1 次の問いに答えよ. 但し, (2) 以降に現れる関数は十分に滑らかであると仮定する.

(1) 関数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$ の偏導関数を求めよ.

(2) $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 g(x,y)$ と $\left(x^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)g(x,y)$ の違いを説明せよ.

(3) 1 変数関数 $\varphi(t),\psi(t)$ を用いて定義される 2 変数関数 $u(x,y):=\varphi(x+2y)+\psi(x-2y)$ に対して, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $u_{xy}(x,y)$ を φ, ψ の 2 次以下の導関数を用いて表せ.

(4) 関数 $z=h(r)$ $(r>0)$ は $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ と合成することにより, x,y の関数と見なされる. このとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を, $\dfrac{dz}{dr}$, $\dfrac{d^2z}{dr^2}$ を用いて表せ.

2 関数 $f(x,y)=x^2y+y^3-3y+2$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ のすべての停留点を求めよ.

(2) $f(x,y)$ のすべての極値および極値をとる点を求めよ.

3 関数 $g(x,y)=\log\sqrt{x^2+y^2}-\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x>0)$ について次の問いに答えよ.

(1) 点 $(1,0)$ の近傍で $g(x,y)=0$ が陰関数 $y=\varphi(x)$ をもつことを確認せよ.

(2) (1) の陰関数 $y=\varphi(x)$ に対して, $g(x,y)=0$ の両辺を x で微分することにより, 「x,y,y' の関係式」と「x,y,y',y'' の関係式」を求めよ.

(3) 関数 $\varphi(x)$ の $x=1$ における Taylor 展開 $\varphi(x)=c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+\cdots$ の係数 c_0, c_1, c_2 を求めよ.

4 関数 $f(x,y,z)$ は点 (x_0,y_0,z_0) の近傍で C^1 級であるとする. 点 (x_0,y_0,z_0) が曲面 $f(x,y,z)=c$ 上にあり, $f_x(x_0,y_0,z_0)f_y(x_0,y_0,z_0)f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ を満たすとき, 次の問いに答えよ.

(1) 陰関数の定理を用いて, 曲面 $f(x,y,z)=c$ の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式を求めよ.

(2) 曲面 $f(x,y,z)=c$ の点 (x_0,y_0,z_0) における法線の方程式を求めよ.

5 関数 $z=g(x,y)$ は, 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により, r,θ の関数と考えることができる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) x,y の r,θ に関する Jacobi 行列 および Jacobian を計算せよ.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を用いて表せ.

クラス 4 / クラス 6　担当：伊東（数学）

$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 【中間試験】《解答例》 2019. 12. 13 (Fri) 実施

$\boxed{1}$ 【配点】 $8+6+6+8=28$

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき,

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-(x^3-y^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y)=\frac{-3y^2(x^2+y^2)-(x^3-y^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$(x,y)=(0,0)$ のときは, $f(h,0)=h,\ f(0,h)=-h\ (h\neq 0)$ に注意して,

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=1,\quad f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=-1.$$

以上をまとめて,

$$f_x(x,y)=\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 1 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}},\quad f_y(x,y)=\boxed{\begin{cases}-\dfrac{y^4+3x^2y^2+2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ -1 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}}.$$

(2) $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$ の中の $\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y}$ の係数 x,y が変数であることに注意. これを計算すると,

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)&=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\\
&=x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\\
&=x\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right)+y\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)\\
&=\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y)+\underline{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)}.\end{aligned}$$

よって, 2 つの式は下線の部分だけ異なる.

(3) 合成関数の微分の公式により,

$$u_x=\boxed{\varphi'(x+2y)+\psi'(x-2y)},\quad u_y=\boxed{2\varphi'(x+2y)-2\psi'(x-2y)},$$
$$u_{xy}=\boxed{2\varphi''(x+2y)-2\psi''(x-2y)}.$$

(4) まず, 合成関数の微分の公式を用いて,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dz}{dr}\right)\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}=\frac{d^2 z}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}.$$

ここで, $r=\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{1/2}$ より,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{r},$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right\}=y\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-\frac{xy}{r^3}.$$

よって,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\frac{x}{r}\frac{dz}{dr}}\ \left(=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dz}{dr}\right),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\boxed{\frac{xy}{r^2}\frac{d^2z}{dr^2}-\frac{xy}{r^3}\frac{dz}{dr}}\ \left(=\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{d^2z}{dr^2}-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\frac{dz}{dr}\right).$$

$\boxed{2}$ 【配点】 $6+8=14$

まず, $f(x,y)$ の 2 次 (= 2 階) までの微分は $f'(x,y)=(2xy,\ x^2+3(y^2-1)),\ f''(x,y)=\begin{bmatrix}2y & 2x\\ 2x & 6y\end{bmatrix}$.

(1) $f'(x,y)=(0,0)$ を解くことにより, $f(x,y)$ の停留点は, $(x,y)=\boxed{(0,\pm 1),\ (\pm\sqrt{3},0)}$.

(2) $f(x,y)$ が各停留点で極値をとるかどうかを調べる.

- $f''(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 6 \end{bmatrix}$ より, $\det(f''(0,\pm 1)) = 12 > 0$ かつ $f_{xx}(0,\pm 1) = \pm 2 \gtrless 0$. よって, $f(x,y)$ は $\boxed{(0,1) \text{ で極小値 } f(0,1)=0}$, $\boxed{(0,-1) \text{ で極大値 } f(0,-1)=4}$ をとる.
- $f''(\pm\sqrt{3},0) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{3} \\ \pm 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$ より, $\det(f''(\pm\sqrt{3},0)) = -12 < 0$. よって, $f(x,y)$ は $(\pm\sqrt{3},0)$ では極値をとらない.

3 【配点】 $4+8+8=20$

(1) まず, $g(x,y)$ を y で偏微分すると,

$$g_y(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

よって, $g(1,0) = \log 1 - \mathrm{Tan}^{-1}0 = 0$, $g_y(1,0) = -1 \neq 0$ であるから, 確かに $g(x,y)=0$ は点 $(1,0)$ の近傍で $y=\varphi(x)$ の形の陰関数をもつ.

(2) $g(x,y)=0$ $(y=\varphi(x))$ の両辺を x で微分して (x での微分を $'$ で表す), $g_x(x,y)+g_y(x,y)y'=0$. ここで,

$$g_x(x,y) = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

であるから, (1) の計算と合わせて,

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} + \frac{y-x}{x^2+y^2}\cdot y' = 0. \quad \text{整理して,} \ \boxed{x+y-(x-y)y'=0}.$$

もう 1 度, 両辺を x で微分して,

$$1+y'-(1-y')y'-(x-y)y''=0. \quad \text{整理して,} \ \boxed{1+(y')^2-(x-y)y''=0}.$$

(3) $\varphi(1)=0$ であるから, (2) の結果を用いて,

$$1+0-(1-0)\varphi'(1)=0, \quad 1+\varphi'(1)^2-(1-0)\varphi''(1)=0.$$

これより, $\varphi'(1)=1$, $\varphi''(1)=2$. 従って, $\varphi(x)$ の $x=1$ での Taylor 展開の係数は

$$c_0=\varphi(1)=\boxed{0}, \quad c_1=\varphi'(1)=\boxed{1}, \quad c_2=\frac{1}{2}\varphi''(1)=\boxed{1}.$$

4 【配点】 $8+4=12$

(1) $f(x_0,y_0,z_0)=c$, $f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ より, $f(x,y,z)=c$ は (x_0,y_0,z_0) の近傍で陰関数 $z=\varphi(x,y)$ を定める. このとき, $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ であるから, これを x, y で偏微分して, それぞれ

$$\varphi_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}, \quad \varphi_y(x,y) = -\frac{f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

を得る. また, $\varphi(x_0,y_0)=z_0$ に注意して, $f(x,y,z)=c$ ($\Leftrightarrow z=\varphi(x,y)$) 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式は $z-z_0=\varphi_x(x_0,y_0)(x-x_0)+\varphi_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ と書かれる. これに上式を用いて

$$z-z_0 = -\frac{f_x(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0) - \frac{f_y(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0).$$

整理して, $\boxed{f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$.

(2) 接平面の方程式を見れば, この平面が $\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(x_0,y_0,z_0) \\ f_z(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}$ を法線ベクトルとすることが分かる.

仮定によりこのベクトルの各成分は 0 にならないので, 点 (x_0,y_0,z_0) における法線の方程式は

$$\boxed{\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{f_z(x_0,y_0,z_0)}}.$$

5 【配点】 $6+10+10=26$

(1) (x,y) の (r,θ) に関する Jacobi 行列は $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}}.$

Jacobian (= Jacobi 行列式) は $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = \boxed{r}.$

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ であるから,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \boxed{-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

更に，この結果を用いて，

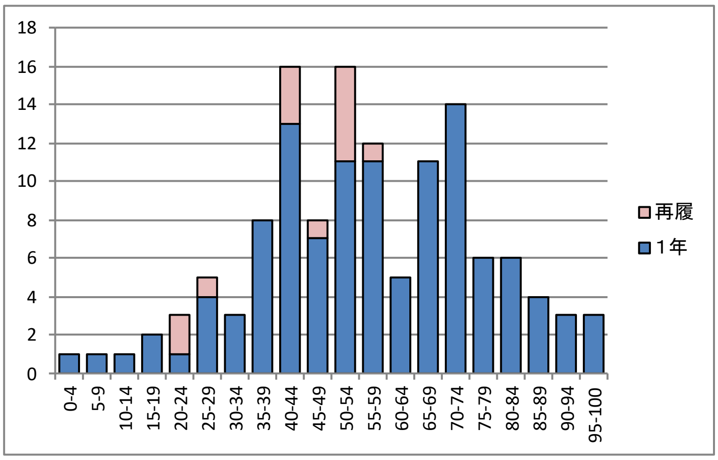
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= -r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= -r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} \\
&\qquad - r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y} + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial y} \\
&= \boxed{r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - r\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)}.
\end{aligned}$$

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$ (逆写像定理を用いた) より，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \boxed{\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}}.$$

更に，この結果を用いて，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\
&= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\
&= \sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial \theta}\right) \\
&\qquad + \frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial \theta\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right) \\
&= \boxed{\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}}.
\end{aligned}$$



	人 数	平均点	標準偏差	最高点
クラス 4	57	55.1	17.8	93
クラス 6	58	59.1	22.4	98
1 年合計	115	57.1	20.4	98
再履	13	42.5	10.7	55