$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 《期末試験》

2019. 2. 8 (Fri) 1 or 2 限 実施

$\boxed{1}$ から $\boxed{4}$ にある 15 問のうちの 11 問 (以上) および $\boxed{5}$ に答えよ.
どういう順序で解答してもよい. 結果のみでなく, 計算の過程も書くこと.

$\boxed{1}$ 次の重積分あるいは 3 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} (x+2y)^2\,dxdy,\qquad D_1: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \sin(x+y)\,dxdy,\qquad D_2: 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi.$

(3) $\displaystyle\iint_{D_3} x^2 e^{-y^2}\,dxdy,\qquad D_3: 0 \leqslant x^3 \leqslant y \leqslant 1.$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_4} xy\,dxdydz,\qquad D_4:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1.$

$\boxed{2}$ 適当な変数変換を行うことにより, 次の重積分あるいは 3 重積分を計算せよ.

(5) $\displaystyle\iint_{E_1} xy^2\,dxdy,\qquad E_1:\ 0 \leqslant x \leqslant y,\ x^2+y^2 \leqslant 1.$

(6) $\displaystyle\iint_{E_2} \frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,dxdy,\qquad E_2:\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x+y \leqslant 1.$

(7) $\displaystyle\iint_{E_3} y\,dxdy,\qquad E_3:$ 曲線 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$ と x 軸, y 軸で囲まれた部分.

(8) $\displaystyle\iiint_{E_4} \frac{(x^2+y^2)e^{-x^2-y^2-z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz,\qquad E_4:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ (x,y,z) \neq (0,0,0).$

$\boxed{3}$ 次の線積分を計算せよ. 但し, (9) は弧長に関する線積分を表す.

(9) $\displaystyle\int_{C_1} y\,ds,\qquad C_1:\ x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ \ (0 \leqslant t \leqslant \pi).$

(10) $\displaystyle\int_{C_2} x\,dy - y\,dx,\qquad C_2:\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (正の向きに 1 周).

$\boxed{4}$ 次の面積あるいは体積を求めよ.

(11) 平面曲線 $(x^2+y^2)^3 = x^2$ で囲まれた部分のうちで $x \geqslant 0$ の側にある部分の面積 S_1.

(12) 円柱面 $y^2+z^2 = 1$ のうちで, 円柱面 $x^2+y^2 = 1$ の内側にある部分の面積 S_2.

(13) 2 つの放物面 $z = x^2+y^2$, $z = 2x - x^2 - y^2$ で囲まれた部分の体積 V_1.

(14) 放物面 $z = 1-(x^2+y^2)$ と xy 平面で囲まれた部分と, 円柱 $x^2+y^2 \leqslant x$ の共通部分の体積 V_2.

(15) 半径 $a > 0$ の球面上の点は $(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$ と表される. この球面上の $\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$ に対応する部分の面積 S_3.

$\boxed{5}$ 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 + 6y$, $g(x,y) = x^2 - y^2 + 3$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 点 (a,b) は曲線 $g(x,y) = 0$ 上にあり, 「この点のまわりで $g(x,y) = 0$ が $y = \varphi(x)$ の形の陰関数をもつ」とする. $g(x,y) = 0$ 上の点でこの条件を満たさないものが存在するならそのような点をすべて挙げ, 存在しないなら「存在しない」と書け.

(2) 点 (a,b) が (1) の条件を満たすとき, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ を a, b の有理式 $\left(= \frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}\right)$ で表せ.

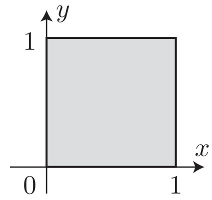
(3) Lagrange の未定乗数法を用いて, 曲線 $g(x,y) = 0$ 上での $f(x,y)$ の極値を調べよ. ただし, 「点 (a,b) で極大値 c をとる」「点 (a,b) で極小値 c をとる」「極値をとらない」という形式で答えること.

クラス 4 / クラス 6 担当：伊東（数学）

微分積分学第二《期末試験》【解答例】

2019. 2. 8 (Fri) 1 or 2 限 実施

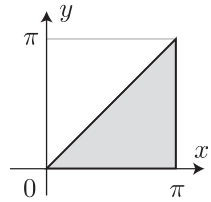
1 【(1)–(15) の配点】 各 7 点 (11 問より多く解答した場合は点数のよい方から 11 問の点数を足す)



(1)《与式》$= \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 (x+2y)^2\,dy = \int_0^1 \Big[\,\frac{1}{6}(x+2y)^3\,\Big]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \{(x+2)^3 - x^3\}\,dx$

$\displaystyle = \frac{1}{6}\Big[\,\frac{(x+2)^4}{4} - \frac{x^4}{4}\,\Big]_0^1 = \frac{1}{24}\{(81-16)-1\} = \boxed{\frac{8}{3}}.$

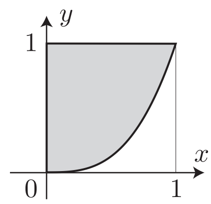
勿論, x, y の順に累次積分してもよいし, 展開してから積分してもよい.



(2)《与式》$= \displaystyle\int_0^\pi dx \int_0^x \sin(x+y)\,dy = \int_0^\pi \Big[-\cos(x+y)\Big]_{y=0}^{y=x} dx$

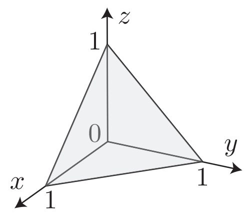
$\displaystyle = \int_0^\pi (\cos x - \cos 2x)\,dx = \Big[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^\pi = \boxed{0}.$

勿論, x, y の順に累次積分してもよいし, 加法定理で展開してから積分してもよい.



(3)《与式》$= \displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{y}\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} x^2 e^{-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} x^2 e^{-y^2}\,dx = \int_0^1 \Big[\,\frac{1}{3}x^3 e^{-y^2}\,\Big]_{x=0}^{x=\sqrt[3]{y}} dx$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int_0^1 y e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}(1-e^{-1})}.$



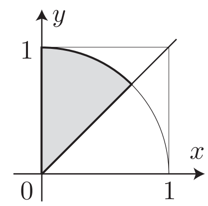
(4)《与式》$= \displaystyle\iiint_{\substack{x+y+z\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} xy\,dxdydz = \iint_{\substack{x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} dxdy \int_0^{1-x-y} xy\,dz$

$\displaystyle = \iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1-x\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} xy(1-x-y)\,dxdy = \int_0^1 \Big[\,x(1-x)\cdot\frac{y^2}{2} - x\cdot\frac{y^3}{3}\,\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx$

$\displaystyle = \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\Big\{\Big[-\frac{1}{4}x(1-x)^4\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x)^4\,dx\Big\}$

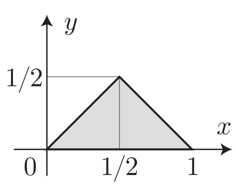
$\displaystyle = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{120}}.$

2 (5) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ (平面の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. この変数変換により E_1 は $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ に対応するから,



《与式》$= \displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ \pi/4\leqslant\theta\leqslant\pi/2}} (r\cos\theta)(r\sin\theta)^2\cdot r\,drd\theta = \Big(\int_0^1 r^4\,dr\Big)\Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\theta\sin^2\theta\,d\theta\Big)$

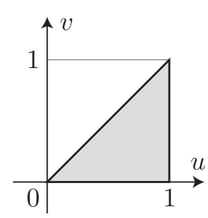
$\displaystyle = \Big[\,\frac{r^5}{5}\,\Big]_0^1 \cdot \Big[\,\frac{1}{3}\sin^3\theta\,\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\Big(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big) = \boxed{\frac{4-\sqrt{2}}{60}}.$



(6) $u = x+y,\ v = x-y$ とおけば, $x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{u-v}{2},\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}.$

このとき E_2 は $0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant u$ に対応する (三角形の頂点に注目せよ) から,

《与式》$= \displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ 0\leqslant v\leqslant u}} \frac{u}{1+v^2}\cdot\Big|-\frac{1}{2}\Big|\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^u \frac{u}{1+v^2}\,dv$



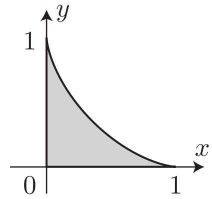
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\,u\,\mathrm{Tan}^{-1}v\,\Big]_{v=0}^{v=u} du = \frac{1}{2}\int_0^1 u\,\mathrm{Tan}^{-1}u\,du$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\Big[\,\frac{u^2}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}u\,\Big]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+u^2}\Big)du$

$\displaystyle = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\Big[\,u - \mathrm{Tan}^{-1}u\,\Big]_0^1 = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) = \boxed{\frac{\pi-2}{8}}.$

上では v, u の順で累次積分したが, u, v の順で計算した方が考えやすい人もいるかも知れない.

(7) この曲線 (astroid の一部) を $y=f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ と表せば,



$$《与式》=\int_0^1 dx\int_0^{f(x)} y\,dy=\int_0^1\frac{f(x)^2}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0 y^2\,\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^0(\sin^3 t)^2\cdot(-3\cos^2 t\sin t)\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,\sin^7 t\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(\sin^7 t-\sin^9 t)\,dt=\frac{3}{2}\cdot\left(1-\frac{8}{9}\right)\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}=\boxed{\frac{8}{105}}.$$

【別法】 $x=s\cos^3 t,\ y=s\sin^3 t$ $(0\leqslant s\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant\pi/2)$ で変数変換する. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=3s\cos^2 t\sin^2 t$ より,

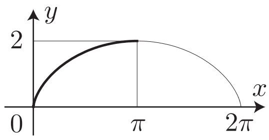
$$《与式》=\iint_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\0\leqslant t\leqslant\pi/2}} s\sin^3 t\cdot 3s\cos^2 t\sin^2 t\,dsdt=\left(\int_0^1 3s^2\,ds\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^5 t\,dt\right)=\boxed{\frac{8}{105}}.$$

(8) $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ (空間の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$. この変数変換により E_4 は $0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ に対応するから,

$$《与式》=\iiint_{\substack{0\leqslant r<\infty\\0\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2}}\frac{r^2\sin^2\theta\,e^{-r^2}}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$=\left(\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}d\varphi\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\pi\sqrt{\pi}}{6}}.$$

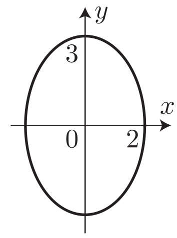
3

(9) 曲線 C_1 は $x=x(t):=t-\sin t,\ y=y(t):=1-\cos t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$ とパラメータ表示される. このとき, $x'(t)^2+y'(t)^2=(1-\cos t)^2+(\sin t)^2=2(1-\cos t)$ より,



$$《与式》=\int_0^\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\sqrt{2}\int_0^\pi(1-\cos\theta)^{3/2}\,dt$$
$$=4\int_0^\pi\sin^3\frac{t}{2}\,dt=8\int_0^{\pi/2}\sin^3 u\,du=\boxed{\frac{16}{3}}.$$

(10) 曲線 C_2 (楕円) で囲まれた閉領域を D とすれば, Green の定理により



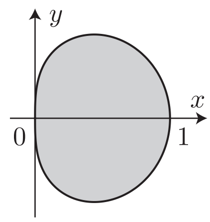
$$《与式》=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right\}dxdy=2\iint_D dxdy=2\,(D\text{ の面積})=\boxed{12\pi}.$$

【別法】 曲線 C_2 は $x=x(t):=2\cos t,\ y=y(t):=3\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ と媒介変数表示されるので,

$$《与式》=\int_0^{2\pi}\{x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\}\,dt=\int_0^{2\pi}\{2\cos t\cdot3\cos t-3\sin t\cdot(-2\sin t)\}\,dt=\boxed{12\pi}.$$

4

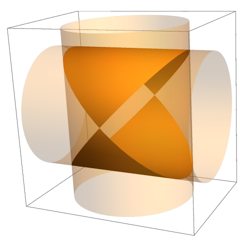
(11) この曲線を平面の極座標 (r,θ) で表せば $(r^2)^2=(r\cos\theta)^2$, すなわち $r=\sqrt{|\cos\theta|}$. $x\geqslant 0$ の部分は $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ に対応するから, 曲線は $r=\sqrt{\cos\theta}$ $(-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$ と表される. 考えているのはこの曲線が囲む部分であるから, その面積は



$$S_1=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\sqrt{\cos\theta}\right)^2d\theta=\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=\boxed{1}.$$

(12) 円柱面 $y^2+z^2=1$ は $z=\pm\sqrt{1-y^2}$ と表されるから, 考えている部分は (平面の) 閉領域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上で定義された 2 つの関数 $z=\pm\sqrt{1-y^2}$ のグラフ (2 枚の曲面) である. ここで,

$$\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}=\sqrt{0^2+\left(\frac{\mp y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



であるから, 求める面積は

$$S_2=2\iint_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{dxdy}{\sqrt{1-y^2}}=2\int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{dx}{\sqrt{1-y^2}}=2\int_{-1}^1 2\,dy=\boxed{8}.$$

(13) 2 曲面の交線は $z = x^2 + y^2 = 2x - x^2 - y^2$ と表される．これより，x, y のみの関係式 $x^2 + y^2 = x$ (交線を xy 平面に正射影した図形，ここでは中心 $(1/2, 0)$，半径 $1/2$ の円) が得られる．よって，考えている部分は閉領域 $x^2 + y^2 \leqslant x$ ($\Leftrightarrow$ $(x - 1/2)^2 + y^2 \leqslant (1/2)^2$) 上で定義された 2 つの関数 $z = x^2 + y^2$, $z = 2x - x^2 - y^2$ のグラフで挟まれた部分である (右下図)．従って，

$$V_1 = \iiint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant x \\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 2x - x^2 - y^2}} dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leqslant x} \{(2x - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)\}\, dxdy$$

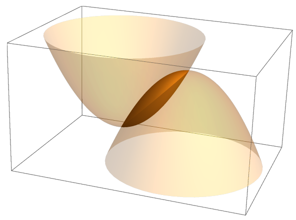
$$= \iint_{x^2+y^2 \leqslant x} 2(x - x^2 - y^2)\, dxdy = 2 \iint_{(x-1/2)^2+y^2 \leqslant (1/2)^2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 \right\} dxdy.$$

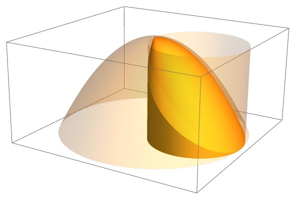
ここで，点 $(1/2, 0)$ を中心とする極座標 (r, θ) を用いて，$x - 1/2 = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変換すれば，

$$V_1 = 2 \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1/2 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \left(\frac{1}{4} - r^2\right) \cdot r\, drd\theta = \left(\int_0^{1/2} \left(\frac{r}{2} - 2r^3\right) dr\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = \boxed{\frac{\pi}{16}}.$$

あるいは，通常の極座標 (r, θ) を用いて，$x^2 + y^2 = x$ が $r = \cos\theta$ $(-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)$ と表されるので，

$$V_1 = 2 \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \cos\theta \\ -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2}} (r\cos\theta - r^2)\, r\, drd\theta = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{12} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \boxed{\frac{\pi}{16}}.$$





(14) 考えている部分は閉領域 $x^2 + y^2 \leqslant x$ 上で定義された 2 つの関数 $z = 1 - (x^2 + y^2)$, $z = 0$ のグラフで挟まれた部分であるから，その体積は

$$V_2 = \iiint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant x \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - (x^2+y^2)}} dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leqslant x} \{1 - (x^2 + y^2)\}\, dxdy$$

$x^2 + y^2 \leqslant x$ は極座標を用いて $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ と表されるから，

$$= \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \cos\theta \\ -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2}} (1 - r^2) r\, drd\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos^4\theta}{4} \right) d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{32}}.$$

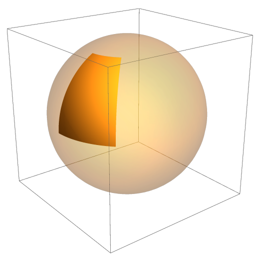
(15) $\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} a\sin\theta\cos\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\theta \end{bmatrix}$ $(\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4)$ とおいて，

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi \\ -a\sin\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = a^2 \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right| = a^2 \sin\theta$$

であるから，求める面積は

$$S_3 = \iint_{\substack{\pi/6 \leqslant \theta \leqslant \pi/2 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4}} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right| d\theta d\varphi = \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} a^2 \sin\theta\, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/4} d\theta \right)$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \Big[-\cos\theta \Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8} \pi a^2}.$$



4 【配点】 $3 + 4 + 16 = 23$ 点

(1) 点 (a, b) の近傍で $y = \varphi(x)$ の形の陰関数をもつ条件は $g_y(a, b) = -2b \neq 0$．よって，この形の陰関数をもたないなら $b = 0$ であるが，$g(a, 0) = a^2 + 3 > 0$ であるから $g(x, y) = 0$ 上には $(a, 0)$ の形の点は $\boxed{\text{存在しない}}$．(次のように説明してもよい．$g(x, y) = 0$ は $y^2 = x^2 + 3$ と書けるから，$g(x, y) = 0$ 上の任意の点 (a, b) の近傍で，$y = \varphi(x)$ の形の陰関数が，$b > 0$ なら $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 3}$，$b < 0$ なら $\varphi(x) = -\sqrt{x^2 + 3}$ と具体的に定まる．$b = 0$ とはなり得ないので，「条件」を満たさないような (a, b) は $\boxed{\text{存在しない}}$.)

(2) $x^2 - y^2 + 3 = 0$ $(y = \varphi(x))$ を x で微分する.

- 1 回微分して, $x - yy' = 0$. よって, $y' = \dfrac{x}{y}$ となり, $\varphi'(a) = \boxed{\dfrac{a}{b}}$.
- もう 1 回微分して, $1 - yy'' - (y')^2 = 0$. よって,

$$y'' = \frac{1-(y')^2}{y} = \frac{1-(x/y)^2}{y} = \frac{y^2-x^2}{y^3} = \frac{3}{y^3}. \quad \text{これより, } \varphi''(a) = \boxed{\frac{b^2-a^2}{b^3}} = \boxed{\frac{3}{b^3}}.$$

(3) Lagrange の未定乗数法に従い, まず $F(x,y,\lambda) = x^3 + 6y - \lambda(x^2 - y^2 + 3)$ とおいて,

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 - 2\lambda x = 0, \\ F_y = 6 + 2\lambda y = 0, \\ -F_\lambda = x^2 - y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

を解く. 第 1 式より $x(3x - 2\lambda) = 0$ であるから, $x = 0$ または $x = 2\lambda/3$.

- $x = 0$ ならば, 第 3 式より $y = \pm\sqrt{3}$ となり, 更に第 2 式とから $(x,y,\lambda) = (0, \pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$ を得る.
- $x = 2\lambda/3$ ならば, 第 2 式から得られる $y = -3/\lambda$ とともに第 3 式に代入して,

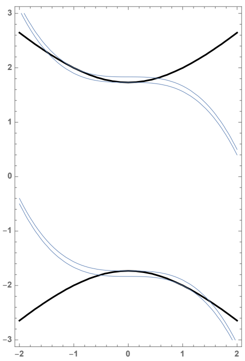
$$\frac{4\lambda^2}{9} - \frac{9}{\lambda^2} + 3 = 0. \quad \therefore\ 4\lambda^4 + 27\lambda^2 - 81 = (4\lambda^2 - 9)(\lambda^2 + 9) = 0.$$

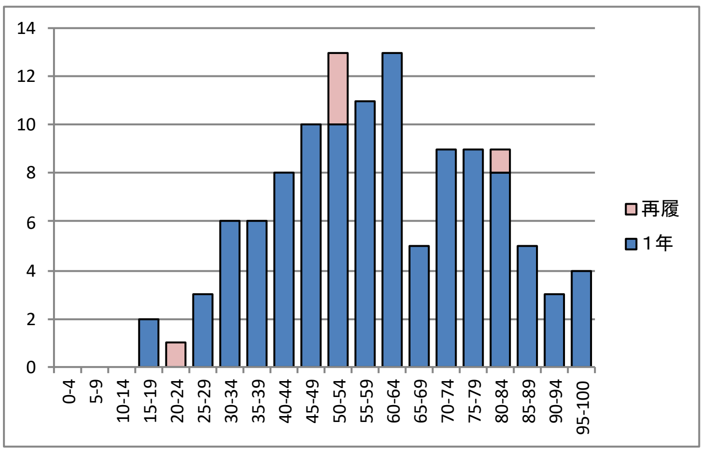
これより, $\lambda = \pm 3/2$ と定まり, $(x,y,\lambda) = (1,-2,3/2), (-1,2,-3/2)$ を得る.

(あるいは, まず第 1 式, 第 2 式から λ を消去して, $yF_x + xF_y = 3x(xy + 2) = 0$. これより, $x = 0$ または $xy = -2$. これと第 3 式, 第 2 式から上の (x,y,λ) の組が求まる.) 以上より, 極値を与える点の候補は $(0,\sqrt{3})$, $(0,-\sqrt{3})$, $(1,-2)$, $(-1,2)$ の 4 点であることが分かる.

次に, これらの点において, $h(x) = x^3 + 6\varphi(x)$ (条件 $g(x,y) = 0$ のもとで $f(x,y)$ を考えたもの) が極大になるのか, 極小になるのかを調べる. $h'(x) = 3x^2 + 6\varphi'(x)$, $h''(x) = 6x + 6\varphi''(x)$ であるから,

- 点 $(0,\sqrt{3})$ で, $\varphi(0) = \sqrt{3}$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = 1/\sqrt{3}$ より, $h(0) = 6\sqrt{3}$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = 2\sqrt{3} > 0$. よって, $\boxed{\text{点 } (0,\sqrt{3}) \text{ で極小値 } 6\sqrt{3}}$ をとる.
- 点 $(0,-\sqrt{3})$ で, $\varphi(0) = -\sqrt{3}$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = -1/\sqrt{3}$ より, $h(0) = -6\sqrt{3}$, $h'(0) = 0$, $h''(0) = -2\sqrt{3} < 0$. よって, $\boxed{\text{点 } (0,-\sqrt{3}) \text{ で極大値 } -6\sqrt{3}}$ をとる.
- 点 $(1,-2)$ で, $\varphi(1) = -2$, $\varphi'(1) = -1/2$, $\varphi''(1) = -3/8$ より, $h(1) = -11$, $h'(1) = 0$, $h''(1) = 15/4 > 0$. よって, $\boxed{\text{点 } (1,-2) \text{ で極小値 } -11}$ をとる.
- 点 $(-1,2)$ で, $\varphi(-1) = 2$, $\varphi'(-1) = -1/2$, $\varphi''(-1) = 3/8$ より, $h(-1) = 11$, $h'(-1) = 0$, $h''(-1) = -15/4 < 0$. よって, $\boxed{\text{点 } (-1,2) \text{ で極大値 } 11}$ をとる.





	人 数	平均点	標準偏差	最高点
クラス 4	57	58.5	18.6	95
クラス 6	55	61.8	18.9	100
1 年合計	112	60.1	18.8	100
再履	5	52.6	19.9	86