$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 【中間試験】

2018. 12. 14 (Fri) 実施

— 答だけでなく本質的な計算過程は残して下さい, 解答する順序は問いません —

1 次の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$ の連続性, 偏微分可能性について説明せよ (偏微分可能な点においては偏微分係数を求めよ).

(2) C^2 級関数 $z = g(r)$ $(r > 0)$ を $r = \sqrt{x^2+y^2}$ により x, y の関数と見なすとき, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ および $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を, $\dfrac{dz}{dr}, \dfrac{d^2 z}{dr^2}$ を用いて表せ.

2 関数 $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{x}{y}$ $(y > 0)$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の 2 次以下の偏導関数をすべて求めよ. (計算チェックのためのヒント：f は調和関数)

(2) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $\left(-1, 1, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ における接平面と法線の方程式を求めよ.

(3) 関数 $f(x,y)$ の点 $(-1,1)$ における Taylor 展開

$$c_{00} + c_{10}(x+1) + c_{01}(y-1) + c_{20}(x+1)^2 + c_{11}(x+1)(y-1) + c_{02}(y-1)^2 + \cdots$$

の係数 $c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}$ を求めよ.

3 関数 $f(x,y) = 4x^2y + y^3 - y + 4$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ のすべての停留点を求めよ. 更に, $f(x,y)$ の極値, および極値をとる点を求めよ.

(2) xy 平面の曲線 $f(x,y) = 0$ が点 $(1,-1)$ の近傍で定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とする. この曲線の点 $(1,-1)$ における接線の方程式を求めよ. また, 関数 $\varphi(x)$ の $x = 1$ の周りでの Taylor 展開 $\varphi(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \cdots$ の係数 c_0, c_1, c_2 を求めよ.

4 $f(x,y,z)$ を $\mathbb{R}^3$ の C^1 級関数とし, (x_0,y_0,z_0) を $f(x,y,z)$ の等位面 $f(x,y,z) = c$ (c は定数) 上の点とする. $f_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ が成り立つと仮定して次の問いに答えよ.

(1) 陰関数の定理を用いて, 曲面 $f(x,y,z) = c$ 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式を求めよ.

(2) 等位面 $f(x,y,z) = c$ とベクトル $\begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(x_0,y_0,z_0) \\ f_z(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}$ は図形的にどのような関係にあるか, 理由を付けて述べよ.

5 関数 $z = g(x,y)$ は, 極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ により, r, θ の関数と考えることができる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) x, y の r, θ に関する Jacobi 行列 および Jacobian を計算せよ.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を用いて表せ.

$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 【中間試験】《解答例》 2018. 12. 14 (Fri) 実施

$\boxed{1}$ 【配点】 $8+12=20$

(1) まず, $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ 以外では明らかに連続かつ偏微分可能 (実際には C^∞ 級). 次に, $t\to 0$ のとき, $(t^2,t)\to 0$ であるが, $f(t^2,t)=1/2 \not\to 0 = f(0,0)$ となるので, $f(x,y)$ は $(0,0)$ では連続でない. 最後に, $f(x,y)$ の偏微分係数 $f_x(x,y), f_y(x,y)$ は $(x,y)\neq(0,0)$, $(x,y)=(0,0)$ の場合に対して, それぞれ

$$f_x(x,y)=\frac{y^2\cdot(x^2+y^4)-xy^2\cdot 2x}{(x^2+y^4)^2}=\frac{-y^2(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2},\qquad f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0;$$
$$f_y(x,y)=\frac{2xy\cdot(x^2+y^4)-xy^2\cdot 4y^3}{(x^2+y^4)^2}=\frac{2xy(x^2-y^4)}{(x^2+y^4)^2},\quad f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$

と計算できる. 従って, $f(x,y)$ は $\boxed{(0,0)\text{ 以外で連続, }(0,0)\text{ で不連続}}$ であり, $\boxed{\mathbb{R}^2\text{ 全体で偏微分可能}}$ となる. また, 各点での偏微分係数は上に示した通り ($\mathbb{R}^2$ 上で f の偏導関数 f_x, f_y が存在する).

(2) まず, 合成関数の微分の公式を用いて,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{dz}{dr}\Big)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{d^2z}{dr^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

x, y の役割を入れ換えて $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{dz}{dr}\dfrac{\partial r}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{d^2z}{dr^2}\Big(\dfrac{\partial r}{\partial y}\Big)^2+\dfrac{dz}{dr}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}$. ここで, $r=(x^2+y^2)^{\frac12}$ より,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac12(x^2+y^2)^{-\frac12}\cdot 2x=x(x^2+y^2)^{-\frac12}=\frac{x}{r},$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=1\cdot(x^2+y^2)^{-\frac12}+x\cdot\Big(-\frac12\Big)(x^2+y^2)^{-\frac32}\cdot 2x=\frac1r-\frac{x^2}{r^3}=\frac{y^2}{r^3}.$$

再び x, y の役割を入れ換えて, $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac1r-\dfrac{y^2}{r^3}=\dfrac{x^2}{r^3}$. よって,

$$\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2=\Big(\frac{dz}{dr}\Big)^2\Big\{\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2\Big\}=\Big(\frac{dz}{dr}\Big)^2\Big\{\Big(\frac{x}{r}\Big)^2+\Big(\frac{y}{r}\Big)^2\Big\}=\boxed{\Big(\frac{dz}{dr}\Big)^2},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{d^2z}{dr^2}\Big\{\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2\Big\}+\frac{dz}{dr}\Big(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\Big)$$
$$=\frac{d^2z}{dr^2}\Big\{\Big(\frac{x}{r}\Big)^2+\Big(\frac{y}{r}\Big)^2\Big\}+\frac{dz}{dr}\Big(\frac{y^2}{r^3}+\frac{x^2}{r^3}\Big)=\boxed{\frac{d^2z}{dr^2}+\frac1r\frac{dz}{dr}}.$$

$\boxed{2}$ 【配点】 $8+6+6=20$

(1) $f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}(x/y)$ の 2 次 (= 2 階) までの偏導関数は次の通り.

$$f_x(x,y)=\frac{1/y}{1+(x/y)^2}=\boxed{\frac{y}{x^2+y^2}},\quad f_y(x,y)=\frac{-x/y^2}{1+(y/x)^2}=\boxed{\frac{-x}{x^2+y^2}},$$
$$f_{xx}(x,y)=\boxed{\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}},\quad f_{yy}(x,y)=\boxed{\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}},$$
$$f_{xy}(x,y)\ (=f_{yx}(x,y))=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\boxed{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}.$$

(2) $f_x(-1,1)=1/2$, $f_y(-1,1)=1/2$ より, $(-1,1,-\pi/4)$ における接平面の方程式は

$$z+\frac{\pi}{4}=\frac12(x+1)+\frac12(y-1).\quad\therefore\ \boxed{x+y-2z-\frac{\pi}{2}=0}\ \Big(\text{or }\ z=\frac12x+\frac12y-\frac{\pi}{4}\Big).$$

この平面は $(1,1,-2)$ を法線ベクトルとするので, $(-1,1,-\pi/4)$ における法線の方程式は

$$\boxed{x+1=y-1=\frac{z+\frac{\pi}{4}}{-2}}\quad\left(\text{あるいは}\ \begin{cases}x=t-1\\ y=t+1\\ z=-2t-4/\pi\end{cases}\ (t\text{ は媒介変数})\right).$$

(3) $c_{00}=f(-1,1)=\boxed{-\frac{\pi}{4}}$, $c_{10}=f_x(-1,1)=\boxed{\frac12}$, $c_{01}=f_y(-1,1)=\boxed{\frac12}$,

$c_{20}=\frac12 f_{xx}(-1,1)=\boxed{\frac14}$, $c_{11}=f_{xy}(-1,1)=\boxed{0}$, $c_{02}=\frac12 f_{yy}(-1,1)=\boxed{-\frac14}$.

3 【配点】 $12+12=24$

(1) まず, $\begin{cases} f_x(x,y)=8xy=0 \\ f_y(x,y)=4x^2+3y^2-1=0 \end{cases}$ を解くことにより, 停留点は $\boxed{\left(\pm\frac{1}{2},0\right),\ \left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$. 次に, Hesse 行列 $f''(x,y)=\begin{bmatrix} 8y & 8x \\ 8x & 6y \end{bmatrix}$ を用いて, f の各停留点で極値の判定を行う.

- $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ において, $f''(\pm\frac{1}{2},0)=\begin{bmatrix} 0 & \pm4 \\ \pm4 & 0 \end{bmatrix}$ より, $\det f''\left(\pm\frac{1}{2},0\right)=-16<0$. よって, $\left(\pm\frac{1}{2},0\right)$ は f の鞍点となり, 極値をとらない.
- $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ において, $f''\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\begin{bmatrix} \pm\frac{8}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \pm2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ より, $\det f''\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=16>0$. よって, $f_{xx}\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ の符号に注意して, f は $\boxed{\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ で極小値 } 4-\frac{2}{3\sqrt{3}}}$, $\boxed{\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ で極大値 } 4+\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ をとる.

(2) $f(1,-1)=0$, $f_y(1,-1)=6\neq0$ であるから, 確かに $f(x,y)=0$ は点 $(1,-1)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ を定める. $4x^2y+y^3-y+4=0$ $(y=\varphi(x))$ を x で微分し (x での微分を $'$ で表す),

$$8xy+4x^2y'+3y^2y'-y'=0,\ \text{整理して } (4x^2+3y^2-1)y'+8xy=0.\quad \therefore\ y'=-\frac{8xy}{4x^2+3y^2-1}.$$

もう 1 度, 両辺を x で微分して,

$$(4x^2+3y^2-1)y''+(8x+6yy')y'+8y+8xy'=0.\quad \therefore\ y''=-\frac{(16x+6yy')y'+8y}{4x^2+3y^2-1}.$$

よって, $\varphi(1)=-1$ に注意して,

$$\varphi'(1)=-\frac{-8}{4+3-1}=\frac{4}{3},\qquad \varphi''(1)=-\frac{(16-6\cdot\frac{4}{3})\frac{4}{3}-8}{4+3-1}=-\frac{4}{9}.$$

以上より,

- $y=\varphi(x)$ の点 $(1,-1)$ における接線の方程式は $y+1=\varphi'(1)(x-1)=\frac{4}{3}(x-1)$. これを整理して $\boxed{4x-3y-7=0}$ $\left(\text{あるいは } y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)$.
- $\varphi(x)$ の $x=1$ での Taylor 展開の係数は $c_0=\varphi(1)=\boxed{-1}$, $c_1=\varphi'(1)=\boxed{\frac{4}{3}}$, $c_2=\frac{1}{2!}\varphi''(1)=\boxed{-\frac{2}{9}}$.

4 【配点】 $8+4=12$

(1) $f(x_0,y_0,z_0)=c$, $f_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$ より, $f(x,y,z)=c$ は (x_0,y_0,z_0) の近傍で陰関数 $z=\varphi(x,y)$ を定める. このとき, $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ であるから, これを x, y で偏微分して, それぞれ

$$\varphi_x(x,y)=-\frac{f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))},\quad \varphi_y(x,y)=-\frac{f_y(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

を得る. また, $\varphi(x_0,y_0)=z_0$ に注意して, $f(x,y,z)=c$ ($\Leftrightarrow z=\varphi(x,y)$) 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式は $z-z_0=\varphi_x(x_0,y_0)(x-x_0)+\varphi_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ と書かれる. これに上式を用いて

$$z-z_0=-\frac{f_x(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)-\frac{f_y(x_0,y_0,z_0)}{f_z(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0).$$

整理して, $\boxed{f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$.

(2) 接平面の方程式を見れば, この接平面が $\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(x_0,y_0,z_0) \\ f_z(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}\neq\mathbf{0}$ を法線ベクトルとすることが分かる. 従って, ベクトル $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ は点 (x_0,y_0,z_0) において曲面 $f(x,y,z)=c$ と $\boxed{\text{垂直}}$ になる.

5 【配点】 $4+10+10=24$

(1) (x,y) の (r,θ) に関する Jacobi 行列は $\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}}$.

Jacobian (= Jacobi 行列式) は $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=\boxed{r}$.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ であるから,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \boxed{-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

更に, この結果を用いて,

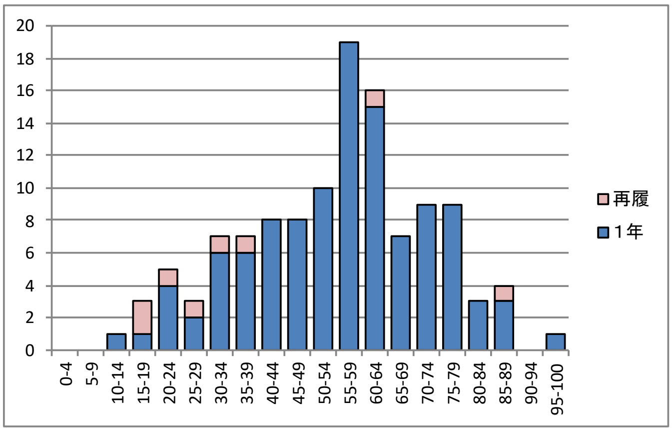
$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \\
&= -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} - r\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial y} \\
&= \boxed{r\cos\theta\sin\theta\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}}.
\end{aligned}$$

(3) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$ (逆写像定理を用いた) より,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \boxed{\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}}.$$

更に, この結果を用いて,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\
&= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) \\
&= \cos\theta\left(\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\right) \\
&\qquad - \frac{\sin\theta}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right) \\
&= \cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= \boxed{\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)}.
\end{aligned}$$



	人 数	平均点	最高点
クラス 4	57	55.0	88
クラス 6	55	57.1	97
1 年合計	112	56.0	97
再履	8	40.6	86