微分積分学第二 《期末試験》

2017. 2. 20 (Mon) 2 限 実施

$\boxed{1}$ から $\boxed{3}$ にある **15** 問のうち **10** 問以上 および $\boxed{4}$ に答えよ.
どういう順序で解答してもよい. 結果のみでなく, 計算の過程も書くこと.

$\boxed{1}$ 次の重積分あるいは 3 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} (x+y)^2\,dxdy,\qquad D_1 : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2.$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \sin(x+2y)\,dxdy,\qquad D_2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$

(3) $\displaystyle\iint_{D_3} x^2 e^{-y^2}\,dxdy,\qquad D_3 : x^3 \leqslant y \leqslant 1,\ x \geqslant 0.$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_4} xy\,dxdydz,\qquad D_4 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1.$

$\boxed{2}$ 適当な変数変換を行うことにより, 次の重積分, 3 重積分あるいは線積分を計算せよ.

(5) $\displaystyle\iint_{E_1} x^2y^5\,dxdy,\qquad E_1 :\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1.$

(6) $\displaystyle\iint_{E_2} \frac{x+y}{1+(x-y)^2}\,dxdy,\qquad E_2 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1.$

(7) $\displaystyle\iint_{E_3} y\,dxdy,\qquad E_3 :$ 曲線 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ と x 軸で囲まれる部分.

(8) $\displaystyle\iiint_{E_4} \frac{yz\,e^{-x^2-y^2-z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz,\qquad E_4 :\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ (x,y,z) \neq (0,0,0).$

(9) $\displaystyle\int_C x\,dy - y\,dx,\qquad C :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (正の向きに 1 周).

$\boxed{3}$ 次の面積あるいは体積を求めよ.

(10) 平面曲線 $(x^2+y^2)^2 = 2xy$ で囲まれる部分のうち, $x \geqslant 0$ の側にある部分の面積 S_1.

(11) 円柱面 $y^2+z^2 = 1$ のうち, 円柱面 $x^2+y^2 = 1$ の内側にある部分の面積 S_2.

(12) 円 $x^2+(y-2)^2 = 1$ を x 軸の周りに 1 回転してできる曲面の面積 S_3.

(13) 2 つの放物面 $z = x^2+y^2$, $z = 4x - x^2 - y^2$ で囲まれる部分の体積 V_1.

(14) 円錐 $0 \leqslant z \leqslant 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2 \leqslant 1)$ と円柱 $x^2+y^2 \leqslant x$ の共通部分の体積 V_2.

(15) 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^4 = x^2+y^2$ で囲まれる部分の体積 V_3.

$\boxed{4}$ $g(x,y) = xy(x+y) - 2$ とおき, 曲線 $g(x,y) = 0$ 上での $f(x,y) = xy$ の極値を考える.

(i) Lagrange の未定乗数法が与える「極値をとる点の候補」が 1 つだけある. この点の座標を求めよ. 以下ではこれを (a,b) とする.

(ii) $g(x,y) = 0$ が点 (a,b) の近傍で定める陰関数 $y = \varphi(x)$ に対して, $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ の値を求めよ.

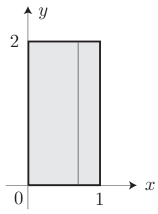
(iii) 点 (a,b) が実際に極値を与える点かどうかを (ii) の結果を利用して調べよ.

$\boxed{\text{微分積分学第二}}$《期末試験》【解答例】

2017. 2. 20 (Mon) 2 限 実施

$\boxed{1}$ (1) $《与式》= \displaystyle\int_0^1 dx \int_0^2 (x+y)^2\,dy = \int_0^1 \Big[\,\frac{1}{3}(x+y)^3\,\Big]_{y=0}^{y=2} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \{(x+2)^3 - x^3\}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\Big[\,\frac{(x+2)^4}{4} - \frac{x^4}{4}\,\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\Big(\frac{81-16}{4} - \frac{1}{4}\Big) = \boxed{\frac{16}{3}}.$$



あるいは,

$$《与式》= \int_0^2 dy \int_0^1 (x+y)^2\,dx = \int_0^2 \Big[\,\frac{1}{3}(x+y)^3\,\Big]_{x=0}^{x=1} dy = \frac{1}{3}\int_0^2 \{(y+1)^3 - y^3\}\,dy$$

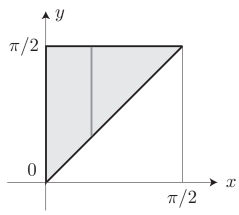
$$= \frac{1}{3}\Big[\,\frac{(y+1)^4}{4} - \frac{y^4}{4}\,\Big]_0^2 = \frac{1}{3}\Big(\frac{81-1}{4} - \frac{16}{4}\Big) = \frac{16}{3}.$$

もちろん展開してから積分してもよい.

(2) $《与式》= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+2y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\,-\frac{1}{2}\cos(x+2y)\,\Big]_{y=x}^{y=\frac{\pi}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \cos 3x)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\,\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) = \boxed{\frac{1}{3}}.$$



あるいは

$$《与式》= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{y} \sin(x+2y)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\,-\cos(x+2y)\,\Big]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 3y + \cos 2y)\,dy$$

$$= \Big[\,-\frac{1}{3}\sin 3y + \frac{1}{2}\sin 2y\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

もちろん三角関数の加法定理により展開してから積分してもよい.

(3) $《与式》= \displaystyle\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant \sqrt[3]{y}\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} x^2 e^{-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} x^2 e^{-y^2}\,dx = \int_0^1 \Big[\,\frac{1}{3}x^3 e^{-y^2}\,\Big]_{x=0}^{x=\sqrt[3]{y}} dx$

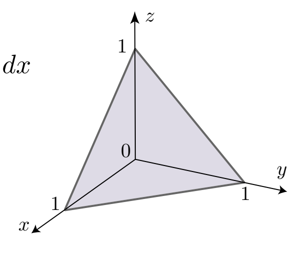
$$= \frac{1}{3}\int_0^1 y e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}\Big(1 - \frac{1}{e}\Big)}.$$

(4) $《与式》= \displaystyle\iiint_{\substack{x+y+z\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} xy\,dxdydz = \iint_{\substack{x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} dxdy \int_0^{1-x-y} xy\,dz$

$$= \iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1-x\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} xy(1-x-y)\,dxdy = \int_0^1 \Big[\,x(1-x)\cdot\frac{y^2}{2} - x\cdot\frac{y^3}{3}\,\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\Big\{\Big[\,-\frac{1}{4}x(1-x)^4\,\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x)^4\,dx\Big\}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{120}}.$$



$\boxed{2}$ (5) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (平面の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. この変数変換により E_1 は $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ に対応するから,

$$《与式》= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant \theta\leqslant \pi}} (r\cos\theta)^2 (r\sin\theta)^5 \cdot r\,drd\theta = \Big(\int_0^1 r^8\,dr\Big)\Big(\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin^5\theta\,d\theta\Big)$$

$$= \Big[\,\frac{r^9}{9}\,\Big]_0^1 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5\theta - \sin^7\theta)\,d\theta = \frac{2}{9}\Big(\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} - \frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}\Big) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} = \boxed{\frac{16}{945}}.$$

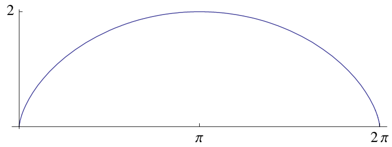
(6) $u=x+y,\, v=x-y$ とおけば, $x=\dfrac{u+v}{2},\, y=\dfrac{u-v}{2},\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac12 & \frac12\\ \frac12 & -\frac12\end{vmatrix}=-\dfrac12$. この変数変換により E_2 は $0\leqslant u\leqslant 1,\, -u\leqslant v\leqslant u$ に対応する (領域を図示して確認せよ) から,

$$《与式》=\iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ -u\leqslant v\leqslant u}}\frac{u}{1+v^2}\cdot\left|-\frac12\right|dudv=\frac12\int_0^1 du\int_{-u}^{u}\frac{u}{1+v^2}\,dv=\frac12\int_0^1\Big[\,u\,\mathrm{Tan}^{-1}v\,\Big]_{v=-u}^{v=u}du$$

$$=\int_0^1 u\,\mathrm{Tan}^{-1}u\,du=\Big[\,\frac{u^2}{2}\,\mathrm{Tan}^{-1}u\,\Big]_0^1-\frac12\int_0^1\frac{u^2}{1+u^2}\,du=\frac{\pi}{8}-\frac12\int_0^1\Big(1-\frac{1}{1+u^2}\Big)du$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac12\Big[\,u-\mathrm{Tan}^{-1}u\,\Big]_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac12\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)=\boxed{\frac{\pi}{4}-\frac12}.$$

(7) この曲線 (サイクロイド) を $y=\varphi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ と表せば,



$$《与式》=\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\varphi(x)}y\,dy=\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(x)^2}{2}\,dx$$

$$=\frac12\int_0^{2\pi}y^2\,\frac{dx}{dt}\,dt=\frac12\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$$

$$=4\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt=8\int_0^{\pi}\sin^6 u\,du=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 u\,du=16\cdot\frac56\frac34\frac12\cdot\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{5\pi}{2}}.$$

(8) $x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$ (空間の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$. この変数変換により E_4 は $0\leqslant r<\infty,\, 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ に対応するから,

$$《与式》=\iiint_{\substack{0\leqslant r<\infty\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi}}\frac{(r\sin\theta\sin\varphi)(r\cos\theta)e^{-r^2}}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

$$=\left(\int_0^{\infty}e^{-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\Big[\,\frac13\sin^3\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot 2=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{3}}.$$

(9) 曲線 C (長径 6, 短径 4 の楕円) の囲む閉領域を D とすれば, Green の定理により

$$《与式》=\iint_D\Big\{\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\Big\}\,dxdy=2\iint_D dxdy=2\,(D\text{ の面積})=\boxed{12\pi}.$$

【別法】 曲線 C は $x=x(t):=2\cos t,\ y=y(t):=3\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ と媒介変数表示されるので,

$$《与式》=\int_0^{2\pi}\{x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\}\,dt=\int_0^{2\pi}\{2\cos t\cdot 3\cos t-3\sin t\cdot(-2\sin t)\}\,dt=\boxed{12\pi}.$$

3 (10) この曲線を平面の極座標 (r,θ) で表せば $(r^2)^2=2(r\cos\theta)(r\sin\theta)$, すなわち $r^2=\sin 2\theta\geqslant 0$. $x\geqslant 0$ の部分は $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ に対応するから, 曲線は $r=\sqrt{\sin 2\theta}$ $\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される. 考えているのはこの曲線が囲む部分であるから, その面積は

$$S_1=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{\sin 2\theta}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}}r\,drd\theta=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\sqrt{\sin 2\theta}\big)^2\,d\theta=\frac12\Big[-\frac12\cos 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac12}.$$

(11) 円柱面 $y^2+z^2=1$ は $z=\pm\sqrt{1-y^2}$ と表されるから, 考えている部分は (平面の) 閉領域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上で定義された 2 つの関数 $z=\pm\sqrt{1-y^2}$ のグラフ (2 枚の曲面) である. ここで,

$$\sqrt{\Big(\frac{dz}{dx}\Big)^2+\Big(\frac{dz}{dy}\Big)^2+1}=\sqrt{0^2+\Big(\frac{\mp y}{\sqrt{1-y^2}}\Big)^2+1}=\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}+1}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

であるから, 求める面積は

$$S_2=2\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dxdy=2\int_{-1}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dx=2\int_{-1}^{1}2\,dy=\boxed{8}.$$

(12) 2 本の曲線 $y = 2 \pm \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ を x 軸の周りに回転した 2 枚の曲面を考えればよい．ここで，

$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{\mp x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから，求める面積は

$$\begin{aligned} S_3 &= 2\pi \int_{-1}^{1} (2 + \sqrt{1-x^2}\,) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - \sqrt{1-x^2}\,) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 8\pi \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 8\pi \Big[\operatorname{Sin}^{-1} x \Big]_{-1}^{1} = \boxed{8\pi^2}. \end{aligned}$$

(13) 2 曲面の交線は $z = x^2 + y^2 = 4x - x^2 - y^2$ と表される．これより x, y のみの関係式 $x^2 + y^2 - 2x = 0$，すなわち $(x-1)^2 + y^2 = 1$ が得られる．よって，考えている部分は閉領域 $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$ 上で定義された 2 つの関数 $z = x^2 + y^2$, $z = 4x - x^2 - y^2$ のグラフで挟まれた部分である．従って，

$$\begin{aligned} V_1 &= \iiint_{\substack{(x-1)^2+y^2 \leqslant 1 \\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 4x-x^2-y^2}} dxdydz = \iint_{(x-1)^2+y^2 \leqslant 1} \{(4x - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)\}\, dxdy \\ &= \iint_{(x-1)^2+y^2 \leqslant 1} 2\{1 - (x-1)^2 - y^2\}\, dxdy \end{aligned}$$

点 $(1, 0)$ を中心とする極座標変換 $x - 1 = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を用いて，

$$= \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} 2(1 - r^2) \cdot r\, drd\theta = \left(\int_0^1 (2r - 2r^3)\, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = 2\pi \Big[r^2 - \frac{r^4}{2} \Big]_0^1 = \boxed{\pi}.$$

(14) 考えている部分は閉領域 $x^2 + y^2 \leqslant x$ 上で定義された 2 つの関数 $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, $z = 0$ のグラフで挟まれた部分であるから，その体積は

$$V_2 = \iiint_{\substack{x^2+y^2 \leqslant x \\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - \sqrt{x^2+y^2}}} dxdydz = \iint_{x^2+y^2 \leqslant x} (1 - \sqrt{x^2+y^2}\,)\, dxdy$$

平面の極座標 (r, θ) を用いて，$x^2 + y^2 \leqslant x$ は $0 \leqslant r \leqslant \cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ と表されるから，

$$\begin{aligned} &= \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}}} (1 - r) r\, drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \Big]_{r=0}^{r=\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos^2\theta}{2} - \frac{\cos^3\theta}{3} \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{4}{9}}. \end{aligned}$$

(15) 考えている曲面は空間の極座標 (r, θ, φ) を用いて，

$$(r^2)^4 = (r\sin\theta\cos\varphi)^2 + (r\sin\theta\sin\varphi)^2, \quad \text{すなわち} \quad r = \sqrt[3]{\sin\theta} \ \ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$$

と表される．この曲面が囲む部分 (E とする) の体積は，

$$\begin{aligned} V_3 &= \iiint_E dxdydz = \iiint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{\sin\theta} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi}} r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = 2\pi \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{\sin\theta} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi}} r^2 \sin\theta\, drd\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\sin\theta}} r^2 \sin\theta\, dr = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{3}}. \end{aligned}$$

4

(i) $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とおいて，$F_x = F_y = F_\lambda = 0$，すなわち

$$y = \lambda y(2x + y), \quad x = \lambda x(x + 2y), \quad xy(x + y) - 2 = 0$$

を解く．第 3 式より明らかに $xy \neq 0$ であるから，第 1 式，第 2 式より，$2x + y = x + 2y = 1/\lambda$．これより $x = y\ (= 1/3\lambda)$ が従い，上の第 3 式とから $(x, y, \lambda) = (1, 1, 1/3)$ が得られる．ここで，$g'(1, 1) = (3, 3) \neq (0, 0)$ であるから，$\boxed{(1, 1)}$ は Lagrange の未定乗数法により得られる極値をとる点の候補である (他には存在しない)．

(ii) $g(1,1)=0$, $g_y(1,1)=3\neq 0$ であるから, 確かに曲線 $g(x,y)=0$ は点 $(1,1)$ の近傍で $y=\varphi(x)$ の形の陰関数を定める. $g(x,y)=x^2y+xy^2-2=0$ $(y=\varphi(x))$ を x で微分して (x での微分を $'$ で表す),

$$(x^2+2xy)y'+2xy+y^2=0. \qquad \therefore\ y'=-\frac{y(2x+y)}{x(x+2y)}.$$

もう 1 度, 両辺を x で微分して,

$$(x^2+2xy)y''+(4x+4y+2xy')y'+2y=0. \qquad \therefore\ y''=-\frac{(4x+4y+2xy')y'+2y}{x(x+2y)}.$$

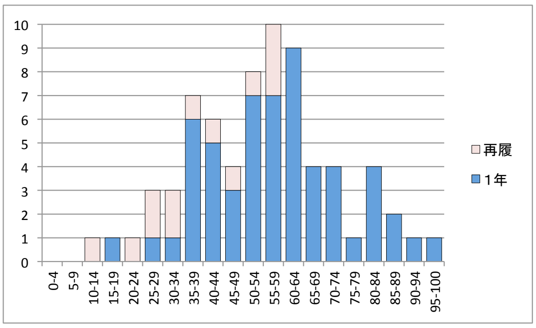
以上より,

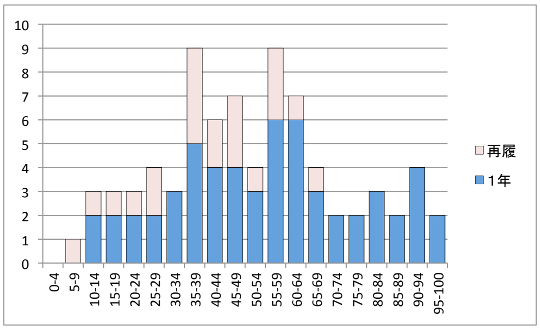
$$\varphi(1)=\boxed{1},\quad \varphi'(1)=-\frac{3}{3}=\boxed{-1},\quad \varphi''(1)=-\frac{-(4+4-2)+2}{3}=\boxed{\frac{4}{3}}.$$

(iii) 点 $(1,1)$ の近傍で $g(x,y)=0$ は $y=\varphi(x)$ と表されるから, 曲線 $g(x,y)=0$ 上での $f(x,y)=xy$ の極値を点 $(1,1)$ の近傍で考えることは, 関数 $h(x):=f(x,\varphi(x))=x\varphi(x)$ の極値を $x=1$ の近傍で考えることに他ならない. ここで, $h'(x)=\varphi(x)+x\varphi'(x)$, $h''(x)=2\varphi'(x)+x\varphi''(x)$ であるから, (2) の結果を用いて

$$h(1)=\varphi(1)=1,\quad h'(1)=\varphi(1)+\varphi'(1)=0,\quad h''(1)=2\varphi'(1)+\varphi''(1)=-\frac{2}{3}<0.$$

よって, 曲線 $g(x,y)=0$ 上で $f(x,y)$ は $\boxed{\text{点 }(1,1)\text{ で極大値 }1\text{ をとる}}$.





クラス 3	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	57	57.8	17.0	96
再履	13	38.8	14.3	59
全体	70	54.3	18.1	96

クラス 4	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	57	55.2	22.9	100
再履	21	40.0	16.5	68
全体	78	51.1	12.4	100

クラス 3/クラス 4　担当：伊東（数学）