$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 【中間試験】

2016. 12. 12 (Mon) 実施

1 次の問いに答えよ. 但し, 問題に現れる関数は十分に滑らかであると仮定する.

(1) 2 変数関数 $f(x,y)$ に対して, $\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))$ と $f_x(x,\varphi(x))$ との違いを説明せよ.

(2) 1 変数関数 $\varphi(x),\psi(x)$ を用いて定義される 2 変数関数 $u(x,y) := \varphi(x+2y)+\psi(x-2y)$ に対して, $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$, $u_{xy}(x,y)$ を φ, ψ の 2 次以下の導関数を用いて表せ.

(3) 関数 $z=g(r)$ $(r>0)$ を $r=\sqrt{x^2+y^2}$ により x,y の関数と見なすとき, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を $\dfrac{dz}{dr}$, $\dfrac{d^2 z}{dr^2}$ を用いて表せ. 更に, その結果を利用して, 関数 $z=\log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y)\neq(0,0))$ が調和関数であるかどうかを調べよ.

2 関数 $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$ について次の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ の 2 次以下の偏導関数をすべて求めよ. (計算チェックのためのヒント：f は調和関数)

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(1,-1,1/2)$ における接平面の方程式を求めよ.

(3) 関数 $f(x,y)$ の $(x,y)\to(1,-1)$ での漸近展開

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= c_{00}+c_{10}(x-1)+c_{01}(y+1)\\
&\qquad + c_{20}(x-1)^2+c_{11}(x-1)(y+1)+c_{02}(y+1)^2+o((x-1)^2+(y+1)^2)
\end{aligned}
$$

の係数 $c_{00},c_{10},c_{01},c_{20},c_{11},c_{02}$ を求めよ.

3 関数 $g(x,y)=x^2-2xy+2y^3-1$ について次の問いに答えよ.

(1) $g(x,y)$ の停留点をすべて求め, その各点で極大値・極小値をとるかどうかを判定せよ.

(2) xy 平面の曲線 $g(x,y)=0$ が点 $(1,-1)$ の近傍で定める陰関数を $y=\varphi(x)$ とする. $\varphi(x)$ の $x\to1$ での漸近展開 $\varphi(x)=c_0+c_1(x-1)+c_2(x-1)^2+o((x-1)^2)$ の係数 c_0,c_1,c_2 を求めよ.

4 $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^1 級関数とし, (x_0,y_0) を $f(x,y)$ の等高線 $f(x,y)=c$ (c は定数) 上の点とする. $f_y(x_0,y_0)\neq0$ が成り立つと仮定して次の問いに答えよ. (試験中のコメントに沿って書き直した)

(1) 陰関数の定理を用いて, 曲線 $f(x,y)=c$ の点 (x_0,y_0) における接線の方程式を求めよ.

(2) 等高線 $f(x,y)=c$ とベクトル $\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0)\\ f_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}$ は図形的にどのような関係にあるか.

5 関数 $z=g(x,y)$ は, 極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により, r,θ の関数と考えることができる. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) x,y の r,θ に関する Jacobi(ヤコビ) 行列 および Jacobian(ヤコビアン) を計算せよ.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を用いて表せ.

クラス 4 / クラス 3　担当：伊東（数学）

微分積分学第二 【中間試験】《解答例》 2016. 12. 12 (Mon) 実施

1 【配点】 $6+6+(8+4)=24$

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))$ は, $f(x,y)$ に $y=\varphi(x)$ を代入して得られる x の関数 $f(x,\varphi(x))$ を微分したもの. 一方, $f_x(x,\varphi(x))$ は, 2 変数関数 $f(x,y)$ の x に関する偏導関数 $f_x(x,y)$ に $y=\varphi(x)$ を代入したもの. 合成関数の微分の公式を用いれば, $\dfrac{d}{dx}f(x,\varphi(x))$ と $f_x(x,\varphi(x))$ の具体的な関係は

$$\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

(2) 合成関数の微分の公式により,

$$u_x=\boxed{\varphi'(x+2y)+\psi'(x-2y)},\ u_y=\boxed{2\varphi'(x+2y)-2\psi'(x-2y)},\ u_{xy}=\boxed{2\varphi''(x+2y)-2\psi''(x-2y)}.$$

(3) まず, 合成関数の微分の公式を用いて,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dz}{dr}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{d^2z}{dr^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

x,y の役割を入れ換えて $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{d^2z}{dr^2}\left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\dfrac{dz}{dr}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}$. ここで, $r=\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac12}$ より,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=x(x^2+y^2)^{-\frac12}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=(x^2+y^2)^{-\frac12}+x\cdot(-x)(x^2+y^2)^{-\frac32}=\frac1r-\frac{x^2}{r^3}=\frac{y^2}{r^3}.$$

再び x,y の役割を入れ換えて, $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac1r-\dfrac{y^2}{r^3}=\dfrac{x^2}{r^3}$. よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{d^2z}{dr^2}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right\}+\frac{dz}{dr}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)\\&=\frac{d^2z}{dr^2}\left\{\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\}+\frac{dz}{dr}\left(\frac{y^2}{r^3}+\frac{x^2}{r^3}\right)=\boxed{\frac{d^2z}{dr^2}+\frac1r\frac{dz}{dr}}.\end{aligned}$$

次に, $z=\log\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ に対して,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac1r\frac{d}{dr}\right)\log\frac1r=(-\log r)''+\frac1r(-\log r)'=\frac{1}{r^2}-\frac1r\cdot\frac1r=0$$

であるから, この関数は <u>調和関数</u> である.

2 【配点】 $10+4+6=20$

(1) $$f_x(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\boxed{\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}},\quad f_y(x,y)=\boxed{\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}},$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-4x(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\boxed{\frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3}},$$

$$f_{xy}(x,y)=\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-4y(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^3}=\boxed{\frac{6x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^3}}\ (=f_{yx}(x,y)),$$

$$f_{yy}(x,y)=\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-4y(-2xy)}{(x^2+y^2)^3}=\boxed{\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}}.$$

(2) 曲面 $z=f(x,y)$ の点 $(1,-1,1/2)$ における接平面の方程式は, $z-f(1,-1)=f_x(1,-1)(x-1)+f_y(1,-1)$.
(1) の結果を用いてこれを計算すると,

$$z-\frac12=0(x-1)+\frac12(y+1),\quad \text{すなわち}\quad \boxed{z=\frac{y}{2}+1}\quad (\text{あるいは}\ \ y-2z+2=0).$$

(3) (1) の結果を用いて, $z = f(x,y)$ の $(1,-1)$ における展開の係数は

$$c_{00} = f(1,-1) = \boxed{\frac{1}{2}},\quad c_{10} = f_x(1,-1) = \boxed{0},\quad c_{01} = f_y(1,-1) = \boxed{\frac{1}{2}},$$
$$c_{20} = \frac{1}{2}f_{xx}(1,-1) = \boxed{-\frac{1}{4}},\quad c_{11} = f_{xy}(1,-1) = \boxed{-\frac{1}{2}},\quad c_{02} = \frac{1}{2}f_{yy}(1,-1) = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

【注】 $F(t) := \dfrac{p(t)}{q(t)^k}$ ($k \geq 2$: 整数) の形の関数を微分するとき, 商の微分公式を用いると

$$F'(t) = \frac{p'(t)q(t)^k - p(t)\cdot k\,q(t)^{k-1}q'(t)}{q(t)^{2k}} = \frac{p'(t)q(t) - k\,p(t)q'(t)}{q(t)^{k+1}}$$

と計算できる. この際に約分することが忘れられそうなので, $F(t) = p(t)\cdot\dfrac{1}{q(t)^k}$ と見て, 積の微分公式を適用し,

$$F'(t) = p'(t)\cdot\frac{1}{q(t)^k} + p(t)\cdot\frac{(-k)q'(t)}{q(t)^{k+1}} = \frac{p'(t)q(t) - k\,p(t)q'(t)}{q(t)^{k+1}}$$

と計算する方がよいかもしれない. あるいは, 対数微分法を用いて, $\log|F(t)| = \log|p(t)| - k\log|q(t)|$ から

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{p'(t)}{p(t)} - k\,\frac{q'(t)}{q(t)},\quad F'(t) = \frac{p'(t)q(t) - k\,p(t)q'(t)}{p(t)q(t)}F(t) = \frac{p'(t)q(t) - k\,p(t)q'(t)}{q(t)^{k+1}}$$

と計算することもできる.

3

【配点】 $10 + 10 = 20$

(1) まず, $g(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^3 - 1$ の 2 次以下の偏導関数を $g'(x,y)$, $g''(x,y)$ の形で計算しておく:

$$g'(x,y) = \big(2x - 2y,\ -2x + 6y^2\big) = \big(2(x-y),\ -2(x-3y^2)\big),\quad g''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 12y \end{pmatrix}.$$

次に, g の停留点を求める:

$$g'(x,y) = (0,0) \quad\Leftrightarrow\quad x - y = x - 3y^2 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y) = \boxed{(0,0),\ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$$

最後に, g が停留点 $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ で極値をとるかどうかを調べる.

- $(0,0)$ において： $g''(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ より, $\det g''(0,0) = -4 < 0$. よって, $(0,0)$ は g の鞍点となり, g は $\boxed{(0,0)\text{ で極値をとらない}}$.
- $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ において： $g''\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ より, $\det g''\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = 4 > 0$, $g_{xx}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = 2 > 0$. よって, g は $\boxed{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\text{ で極小値 } g\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{28}{27}\text{ をとる}}$.

(2) $g(1,-1) = 0$ であり, かつ $g_y(x,y) = -2x + 6y^2$ より $g_y(1,-1) = 4 \neq 0$ であるから, 確かに $g(x,y) = 0$ は点 $(1,-1)$ の近傍で陰関数 $y = \varphi(x)$ を定める. $x^2 - 2xy + 2y^3 - 1 = 0$ $(y = \varphi(x))$ を x で微分して (x での微分を $'$ で表す), $2x - 2y - 2xy' + 6y^2y' = 0$. これを整理して,

$$x - y - (x - 3y^2)y' = 0. \qquad \therefore\ y' = \frac{x - y}{x - 3y^2}.$$

もう 1 度, 両辺を x で微分して, $1 - y' - (1 - 6yy')y' - (x - 3y^2)y'' = 0$. よって,

$$1 - (2 - 6yy')y' - (x - 3y^2)y'' = 0. \qquad \therefore\ y'' = \frac{1 - (2 - 6yy')y'}{x - 3y^2}.$$

$\varphi(1) = -1$ に注意して, $\varphi'(1) = \dfrac{1+1}{1-3} = -1$, $\varphi''(1) = \dfrac{1 - (2-6)(-1)}{1-3} = \dfrac{3}{2}$. よって, $\varphi(x)$ の $x = 1$ における展開の係数は

$$c_0 = \varphi(1) = \boxed{-1},\quad c_1 = \varphi'(1) = \boxed{-1},\quad c_2 = \frac{1}{2!}\varphi''(1) = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

【注】公式 $\varphi'(1) = -\dfrac{g_x(1,-1)}{g_y(1,-1)}$, $\varphi''(1) = -\dfrac{g_{xx}(1,-1) + 2g_{xy}(1,-1)\varphi'(1) + g_{yy}(1,-1)\varphi'(1)^2}{g_y(1,-1)}$ を用いてもよい.

4 【配点】 $8+4=12$

(1) 仮定より, $f(x_0,y_0)=c$ かつ $f_y(x_0,y_0)\neq 0$. よって, 陰関数定理により, (x_0,y_0) の近傍で $f(x,y)=c$ から陰関数 $y=\varphi(x)$ が定まり, $\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ を満たす. このとき, 点 (x_0,y_0) における $f(x,y)=c$ の接線, すなわち $y=\varphi(x)$ の接線は $y-y_0=\varphi'(x_0)(x-x_0)$ で与えられる. これに $\varphi'(x_0)=-\dfrac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$ を代入し整理して, 接線の方程式 $\boxed{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0}$ を得る.

(2) (1) で求めた接線の方程式は

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=0$$

と書けるので, $\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ はこの接線の法線ベクトルである. よって, 点 (x_0,y_0) において $\begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ は等高線 $f(x,y)=c$ に対して垂直である.

【注】ここでは $f_y(x_0,y_0)\neq 0$ を仮定したが, "(x_0,y_0) が $f(x,y)$ の停留点でない" という条件があれば, 接線の存在が保証され, その方程式が $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$ で与えられる. 従って, この緩い条件の下でも (2) で述べた事実は正しい.

5 【配点】 $6+9+9=24$

(1) (x,y) の (r,θ) に関する Jacobi 行列は $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}}$.

Jacobian (= Jacobi 行列式) は $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=\boxed{r}$.

(2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ より,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}}\quad\left(\text{あるいは}\quad \frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\boxed{-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}}\quad\left(\text{あるいは}\quad \frac{\partial z}{\partial \theta}=-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

更に, これら 2 式を用いて,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&=-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}-r\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}+r\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\
&=\boxed{r\sin\theta\cos\theta\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}}.
\end{aligned}$$

あるいは,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}&=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left\{xy\left(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+(x^2-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}\right\}.
\end{aligned}$$

(3) 逆写像定理により, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial r},\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$. よって,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\boxed{\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}}.$$

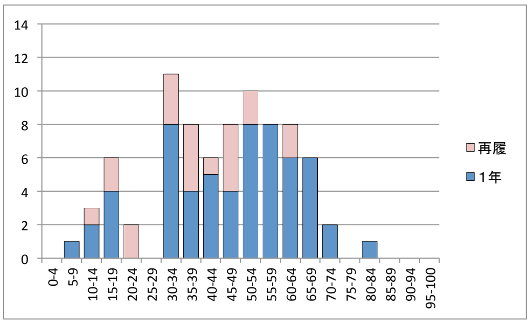
更に，これら２式を用いて，

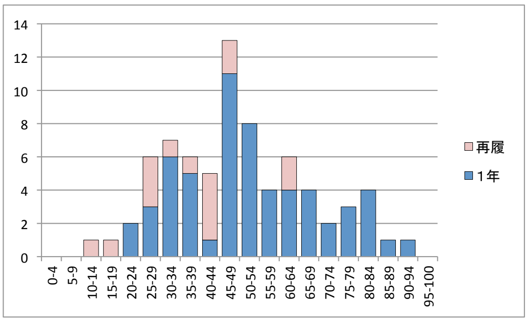
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\Big) = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\Big)$$

$$= \cos\theta\Big(\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{r}\Big(\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\Big)$$

$$= \boxed{\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}}$$

$$\left(= \cos\theta\sin\theta\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\Big) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \theta}\Big)\right).$$





クラス 4	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	59	47.0	17.2	83
再履	21	37.8	14.0	63

クラス 3	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	59	52.6	17.6	90
再履	15	37.9	13.6	61