$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 《期末試験》

2016. 2. 15 (Mon) 2 限 実施

$\boxed{\text{各８点 (100 点以上切り捨て)}}$ 解答する順序は任意でよい. 結果のみでなく, 計算の過程も書くこと.

$\boxed{1}$ 次の重積分あるいは 3 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} (x-y)^2\,dxdy,\qquad D_1: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \sin(x+y)\,dxdy,\qquad D_2: -x \leqslant y \leqslant 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

(3) $\displaystyle\iint_{D_3} xe^{-y^2}\,dxdy,\qquad D_3: x^2 \leqslant y \leqslant 1,\ x \geqslant 0.$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_4} xy\,dxdydz,\qquad D_4:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1.$

$\boxed{2}$ 適当な変数変換を行うことにより, 次の重積分または 3 重積分を計算せよ.

(5) $\displaystyle\iint_{E_1} (x-y)^2\,dxdy,\qquad E_1:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1.$

(6) $\displaystyle\iint_{E_2} \frac{x-y}{1+(x+y)^2}\,dxdy,\qquad E_2:\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x+y \leqslant 1.$

(7) $\displaystyle\iint_{E_3} y\,dxdy,$ $\qquad E_3$: 曲線 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$ と x 軸, y 軸で囲まれる部分.

(8) $\displaystyle\iiint_{E_4} \frac{xy\,e^{-x^2-y^2-z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz,\qquad E_4:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ (x,y,z) \neq (0,0,0)$

$\boxed{3}$ 次の線積分を計算せよ. 但し, (9) は弧長に関する線積分を表す.

(9) $\displaystyle\int_{C_1} x\,ds,\qquad C_1:\ x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t\ \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$

(10) $\displaystyle\int_{C_2} (x^2+y^2)\,dx + 2x(y+1)\,dy,\qquad C_2:\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (正の向きに 1 周).

$\boxed{4}$ 次の体積を求めよ.

(11) 2 点 $(1,0,0)$, $(0,-1,2)$ を結ぶ線分を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面と 2 平面 $z=0$, $z=2$ とで囲まれる部分の体積 V_1.

(12) 2 つの放物面 $z = x^2+y^2-4x$, $z = 6-x^2-y^2$ で囲まれる部分の体積 V_2.

(13) 曲面 $(x^2+y^2+z^2)^4 = x^2+y^2$ で囲まれる部分の体積 V_3.

$\boxed{5}$ 次の面積を求めよ.

(14) 極座標 (r,θ) を用いて $r = 1+\cos\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ と表される曲線で囲まれる閉領域のうちで $x \geqslant 0$ の範囲にある部分の面積 S_1.

(15) 円錐面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ のうち円柱面 $x^2+y^2 = x$ の内側にある部分の面積 S_2.

(16) 円 $x^2+(y-2)^2 = 1$ を x 軸の周りに 1 回転してできる曲面の面積 S_3.

クラス 6 / クラス 3　担当：伊東（数学）

$\boxed{\text{微分積分学第二}}$《期末試験》【解答例】

2016. 2. 15 (Mon) 2 限 実施

1

(1) $$《与式》 = \int_0^1 dx \int_0^1 (x-y)^2\,dy = \int_0^1 \Big[-\frac{1}{3}(x-y)^3\Big]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \{x^3-(x-1)^3\}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{(x-1)^4}{4}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}.$$
もちろん展開してから積分してもよい.

(2) $$《与式》 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-x}^{2x} \sin(x+y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\cos(x+y)\Big]_{y=-x}^{y=2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 3x)\,dx$$
$$= \Big[x - \frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}}.$$

(3) $$《与式》 = \iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xe^{-y^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2}\,dx = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}x^2e^{-y^2}\Big]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 ye^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{e}\Big)}.$$

(4) $$《与式》 = \iiint_{\substack{x+y+z\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0}} xy\,dxdydz = \iint_{\substack{x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} dxdy \int_0^{1-x-y} xy\,dz$$
$$= \iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1-x\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} xy(1-x-y)\,dxdy = \int_0^1 \Big[x(1-x)\cdot\frac{y^2}{2} - x\cdot\frac{y^3}{3}\Big]_{y=0}^{y=1-x} dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\Big\{\Big[-\frac{1}{4}x(1-x)^4\Big]_0^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 (1-x)^4\,dx\Big\}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \boxed{\frac{1}{120}}.$$

2

(5) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (平面の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. この変数変換により E_1 は $0\leqslant r\leqslant 1$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ に対応するから,
$$《与式》 = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} (r\cos\theta - r\sin\theta)^2\cdot r\,drd\theta = \Big(\int_0^1 r^3\,dr\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\Big)$$
$$= \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^1 \cdot \Big[\theta - \sin^2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\cdot\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big) = \boxed{\frac{\pi-2}{8}}.$$

(6) $u = x+y, v = x-y$ とおけば, $x = \dfrac{u+v}{2}, y = \dfrac{u-v}{2}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$. この変数変換により E_2 は $0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant u$ に対応するから,
$$《与式》 = \iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ 0\leqslant v\leqslant u}} \frac{v}{1+u^2}\cdot\Big|-\frac{1}{2}\Big|\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{1+u^2}\,dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}du$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \Big(1-\frac{1}{1+u^2}\Big)\,du = \frac{1}{4}\Big[u - \mathrm{Tan}^{-1}u\Big]_0^1 = \frac{1}{4}\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big) = \boxed{\frac{4-\pi}{16}}.$$

(7) 問題の曲線 (アステロイドの一部) を $y=\varphi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ と表せば,

$$
\begin{aligned}
《与式》&=\int_0^1 dx\int_0^{\varphi(x)} y\,dy=\int_0^1\frac{\varphi(x)^2}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y^2\frac{dx}{dt}\,dt\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 t)^2\cdot(-3\cos^2 t\sin t)\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cos^2 t\,dt\\
&=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)\,dt=\frac{3}{2}\Big(\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}-\frac{8\cdot6\cdot4\cdot2}{9\cdot7\cdot5\cdot3}\Big)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}=\boxed{\frac{8}{105}}.
\end{aligned}
$$

【別法】 $x=r\cos^3 t$, $y=r\sin^3 t$ (極座標変換ではない) とおけば,

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,t)}=\begin{vmatrix}\cos^3 t & -3r\cos^2 t\sin t\\ \sin^3 t & 3r\sin^2 t\cos t\end{vmatrix}=3r(\cos^4 t\sin^2 t+\cos^2 t\sin^4 t)=3r\cos^2 t\sin^2 t.
$$

この変数変換により E_3 は $0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ に対応するから,

$$
\begin{aligned}
《与式》&=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}}} r\sin^3 t\cdot 3r\cos^2 t\sin^2 t\,drdt=\left(\int_0^1 3r^2\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^5 t\,dt\right)\\
&=\big[\,r^3\,\big]_0^1\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t-\sin^7 t)\,dt=\frac{4\cdot2}{5\cdot3}-\frac{6\cdot4\cdot2}{7\cdot5\cdot3}=\frac{1}{7}\cdot\frac{4\cdot2}{5\cdot3}=\boxed{\frac{8}{105}}.
\end{aligned}
$$

(8) $x=r\sin\theta\cos\varphi$, $y=r\sin\theta\sin\varphi$, $z=r\cos\theta$ (空間の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}=r^2\sin\theta$. この変数変換により E_4 は $0\leqslant r<\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2$ に対応するから,

$$
\begin{aligned}
《与式》&=\iiint_{\substack{0\leqslant r<\infty\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}}\frac{r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi\cdot e^{-r^2}}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi\\
&=\left(\int_0^\infty e^{-r^2}\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\Big[\,\frac{1}{2}\sin^2\varphi\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{6}}.
\end{aligned}
$$

3 (9) 説明の便宜のため $x(t)=t-\sin t,\ y(t)=1-\cos t$ とおく.

$$
\begin{aligned}
《与式》&=\int_0^{2\pi}x(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\\
&=\int_0^{2\pi}\Big(2t\sin\frac{t}{2}-2\sin t\sin\frac{t}{2}\Big)\,dt\overset{\frac{t}{2}=u}{=}\int_0^{\pi}(8u\sin u-4\sin 2u\sin u)\,du.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\int_0^\pi u\sin u\,du=\big[-u\cos u\big]_0^\pi+\int_0^\pi\cos u\,du=\pi,
$$

$$
\int_0^\pi\sin 2u\sin u\,du=2\int_0^\pi\sin^2 u\cos u\,du=\frac{2}{3}\big[\sin^3 u\big]_0^\pi=0\quad\text{(積和の公式を用いてもよい)}
$$

であるから, 《与式》$=\boxed{8\pi}$.

【別法】 曲線 C_2 の対称性に注意すれば, $\dfrac{\int_{C_2}x\,ds}{\int_{C_2}ds}=\pi$ (C_2 の重心の x 座標). ここで,

$$
\int_{C_2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt=\Big[-4\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi}=8
$$

であるから, 《与式》$=\boxed{8\pi}$.

(10) 曲線 C_2 (長径 6, 短径 4 の楕円) の囲む閉領域を D とすれば, Green の定理により

$$
《与式》=\iint_D\Big\{\frac{\partial}{\partial x}(2xy+2x)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\Big\}\,dxdy=2\iint_D dxdy=2\,(D\text{ の面積})=\boxed{12\pi}.
$$

【別法】 曲線 C_2 は $x = x(t) := 2\cos t,\ y = y(t) := 3\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ と媒介変数表示されるので,

$$
\begin{aligned}
《与式》 &= \int_0^{2\pi} \{(x(t)^2 + y(t)^2)x'(t) + 2x(\theta)(y(t)+1)y'(t)\}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \{(4\cos^2 t + 9\sin^2 t)\cdot(-2\sin t) + 2\cdot 2\cos t\,(3\sin t + 1)\cdot 3\cos t\}\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \{-2(4 + 5\sin^2 t)\sin t + 12(3\sin t + 1)\cos^2 t\}\,dt \quad (\text{奇関数の積分は } 0) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} 12\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} 6(1 + \cos 2t)\,dt = \boxed{12\pi}.
\end{aligned}
$$

4 (11) 2 点 $(1,0,0), (0,-1,2)$ を結ぶ線分上の点は $(1,0,0) + t\{(0,-1,2) - (1,0,0)\} = (1-t,\ -t,\ 2t)$ と表される．この線分と平面 $z = z_1\ (= 2t)$ との交点は $(1 - z_1/2, -z_1/2, z_1)$ であるから, 考えている曲面の $z = z_1$ での切り口は半径 $\sqrt{(1-z_1/2)^2 + (-z_1/2)^2} = \sqrt{1 - z_1 + z_1^2/2}$ の円となる．よって,

$$V_1 = \int_0^2 \pi\Big(1 - z + \frac{z^2}{2}\Big)\,dz = \pi\Big(2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{6}\Big) = \boxed{\frac{4\pi}{3}}.$$

(12) 2 つの放物面の交線は $z = x^2 + y^2 - 4x = 6 - x^2 - y^2$ と表される．これより x, y のみの関係式 $x^2 + y^2 - 2x = 3$, すなわち $(x-1)^2 + y^2 = 4$ が得られる．よって, 考えている部分は $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 4$ で定義された 2 つの関数のグラフ $z = x^2 + y^2 - 4x$, $z = 6 - x^2 - y^2$ で囲まれる部分である．故に,

$$
\begin{aligned}
V_2 &= \iiint_{\substack{(x-1)^2+y^2\leqslant 4 \\ x^2+y^2-4x\leqslant z\leqslant 6-x^2-y^2}} dxdydz = \iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 4} \{(6 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2 - 4x)\}\,dxdy \\
&= \iint_{(x-1)^2+y^2\leqslant 4} 2\{4 - (x-1)^2 - y^2\}\,dxdy
\end{aligned}
$$

点 $(1,0)$ を中心とする極座標変換 $x - 1 = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を用いて,

$$= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 2 \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} 2(4 - r^2)\cdot r\,drd\theta = \Big(\int_0^2 (8r - 2r^3)\,dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi} d\theta\Big) = 2\pi\Big[\,4r^2 - \frac{r^4}{2}\,\Big]_0^2 = \boxed{16\pi}.$$

(13) 考えている曲面は空間の極座標 (r, θ, φ) を用いて, $(r^2)^4 = r^2\sin^2\theta$, すなわち $r = (\sin\theta)^{1/3}\ (0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ と表される．この曲面が囲む部分 (E とする) の体積は,

$$
\begin{aligned}
V_3 &= \iiint_E dxdydz = \iiint_{\substack{0\leqslant r\leqslant(\sin\theta)^{1/3} \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi \\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = 2\pi\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant(\sin\theta)^{1/3} \\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} r^2\sin\theta\,drd\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{(\sin\theta)^{1/3}} r^2\sin\theta\,dr = 2\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{3}}.
\end{aligned}
$$

5 (14) 問題の閉領域 (D とする) の面積 S_1 は, 極座標変換を用いて,

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \iint_D dxdy = \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1+\cos\theta \\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} r\,drd\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(1 + 2\cos\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\Big)\,d\theta = \Big[\,\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{3\pi}{4} + 2}.
\end{aligned}
$$

(15) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ に対して, $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ より, $\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$．よっ

て, グラフの面積に対する公式を用いて, 求める面積は

$$S_2 = \iint_{x^2+y^2 \leqslant x} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}\,dxdy = \iint_{(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \leqslant (\frac{1}{2})^2} \sqrt{2}\,dxdy$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\, 円\ (x-\tfrac{1}{2})^2 + y^2 \leqslant (\tfrac{1}{2})^2\ の面積 \,\right] = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}.$$

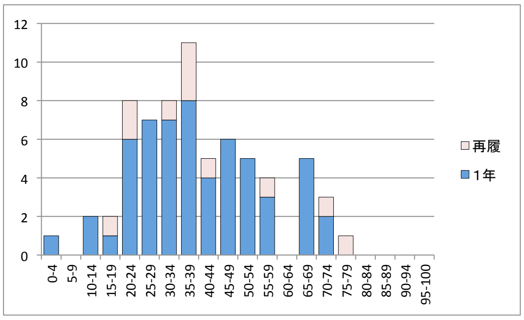
(16) 2 本の曲線 $y = 2 \pm \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ を x 軸の周りに回転した 2 枚の曲面を考えればよい. ここで,

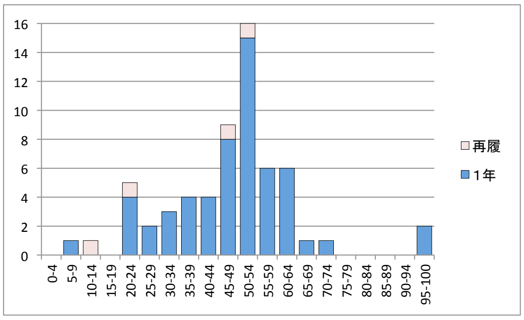
$$\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{\mp x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから, 求める曲面積は

$$S_3 = 2\pi \int_{-1}^{1} (2 + \sqrt{1-x^2}\,) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 2\pi \int_{-1}^{1} (2 - \sqrt{1-x^2}\,) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 8\pi \left[\, \mathrm{Sin}^{-1}\, x \,\right]_{-1}^{1} = \boxed{8\pi^2}.$$





クラス 3	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	57	39.1	15.8	72
再履	11	40.4	18.8	75

クラス 6	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	57	48.8	16.3	100
再履	4	33.5	16.0	52