微分積分学第二 【中間試験】

2015. 12. 11 (Fri) / 12. 21 (Mon) 実施

1 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$ の偏導関数を求めよ．

(2) 2 変数関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ $(t > 0)$ に対して， $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ を計算せよ．

(3) $r > 0$ の C^2 級関数 $z = g(r)$ は $r = \sqrt{x^2+y^2}$ と合成することにより x, y の関数と見なされる．このとき， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{d^2 z}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dz}{dr}$ が成り立つことを示せ．

2 関数 $z = f(x,y)$ は, 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ により, r, θ の関数と考えることができる．このとき, 次の問いに答えよ．

(1) x, y の r, θ に関する Jacobi（ヤコビ）行列 および Jacobian（ヤコビアン）を計算せよ．

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を用いて表せ．

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ のそれぞれを $\dfrac{\partial z}{\partial r}, \dfrac{\partial z}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を用いて表せ．

3 関数 $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ について次の問いに答えよ．

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $\left(1, -1, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ における接平面と法線の方程式を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の点 $(1,-1)$ におけるTaylor（テーラー）展開

$$c_{00} + c_{10}(x-1) + c_{01}(y+1) + c_{20}(x-1)^2 + c_{11}(x-1)(y+1) + c_{02}(y+1)^2 + \cdots$$

の係数 $c_{00}, c_{10}, c_{01}, c_{20}, c_{11}, c_{02}$ を求めよ．

4 関数 $f(x,y) = x^3 + xy^2 + x^2 - 2xy$ について次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ のすべての停留点を求めよ．更に, $f(x,y)$ の極値, および極値をとる点を求めよ．

(2) xy 平面の曲線 $f(x,y) = 0$ が点 $(-1,2)$ の近傍で定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とする． $\varphi(x)$ の $x = -1$ における Taylor 展開 $\varphi(x) = c_0 + c_1(x+1) + c_2(x+1)^2 + \cdots$ の係数 c_0, c_1, c_2 を求めよ．

5 関数 $f(x,y) = xy$ の条件 $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1 = 0$ の下での極値を考える．

(1) Lagrange（ラグランジュ）の未定乗数法により得られる極値点 (極値をとる点) の候補をすべて挙げよ．

(2) すべての極値を求めよ．

クラス 6 / クラス 3　担当：伊東（数学）

$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 【中間試験】《解答例》 2015. 12. 21 (Mon) / 12. 11 (Fri) 実施

1 【配点】 $8+8+8=24$

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき,

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-x^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad f_y(x,y)=\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$(x,y)=(0,0)$ のときは, $f(h,0)=h$, $f(0,h)=0$ $(h\neq 0)$ に注意して,

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=1,\quad f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0.$$

以上をまとめて,

$$f_x(x,y)=\boxed{\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 1 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}},\quad f_y(x,y)=\boxed{\begin{cases}\dfrac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}}.$$

(2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac12}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ より,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big(-\frac12 t^{-\frac32}+t^{-\frac12}\cdot\frac{x^2}{4t^2}\Big)e^{-\frac{x^2}{4t}}=\boxed{\frac{x^2-2t}{8\sqrt{\pi}\,t^{\frac52}}e^{-\frac{x^2}{4t}}},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\boxed{-\frac{x}{4\sqrt{\pi}\,t^{\frac32}}e^{-\frac{x^2}{4t}}}.$$

(3) まず, 合成関数の微分の公式を用いて,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{dz}{dr}\Big)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{d^2z}{dr^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

x,y の役割を入れ換えて $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{d^2z}{dr^2}\Big(\dfrac{\partial r}{\partial y}\Big)^2+\dfrac{dz}{dr}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}$. ここで, $r=\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac12}$ より,

$$\frac{\partial r}{\partial x}=x(x^2+y^2)^{-\frac12}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=(x^2+y^2)^{-\frac12}+x\cdot(-x)(x^2+y^2)^{-\frac32}=\frac1r-\frac{x^2}{r^3}=\frac{y^2}{r^3}.$$

再び x,y の役割を入れ換えて, $\dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\dfrac1r-\dfrac{y^2}{r^3}=\dfrac{x^2}{r^3}$. よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{d^2z}{dr^2}\Big\{\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2\Big\}+\frac{dz}{dr}\Big(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\Big)\\&=\frac{d^2z}{dr^2}\Big\{\Big(\frac{x}{r}\Big)^2+\Big(\frac{y}{r}\Big)^2\Big\}+\frac{dz}{dr}\Big(\frac{y^2}{r^3}+\frac{x^2}{r^3}\Big)=\frac{d^2z}{dr^2}+\frac1r\frac{dz}{dr}.\end{aligned}$$

2 【配点】 $8+8+8=24$

(1) (x,y) の (r,θ) に関する Jacobi 行列は $\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}}$.

Jacobian (= Jacobi 行列式) は $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=\boxed{r}$.

(2) $\Big(\dfrac{\partial z}{\partial r},\dfrac{\partial z}{\partial\theta}\Big)=\Big(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big)\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{bmatrix}=\Big(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big)\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}$ より,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}}\quad\Big(\text{あるいは}\quad\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big),$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta}=\boxed{-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}}\quad\Big(\text{あるいは}\quad\frac{\partial z}{\partial\theta}=-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}\Big).$$

更に, これら２式を用いて,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\Big(-r\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}\Big) = -\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} - r\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y} + r\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)$$

$$= -r\sin\theta\,\Big(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big) + r\cos\theta\,\Big(\cos\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big) - \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$= \boxed{r\sin\theta\cos\theta\Big(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big) + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

あるいは,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(-y\,\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial z}{\partial y}\Big) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(-y\,\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial z}{\partial y}\Big)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(-y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial y} + x\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(-\frac{\partial z}{\partial x} - y\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + x\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big\{xy\Big(-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big) + (x^2-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - y\,\frac{\partial z}{\partial x} + x\,\frac{\partial z}{\partial y}\Big\}.$$

(3) 逆写像定理により, $\Big(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big) = \Big(\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}^{-1} = \Big(\frac{\partial z}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r}\end{bmatrix}$. よって,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boxed{\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \boxed{\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}}.$$

更に, これら２式を用いて,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big) = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)$$

$$= \cos\theta\Big(\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\Big) - \frac{\sin\theta}{r}\Big(\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r} + \sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\Big)$$

$$= \boxed{\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}}$$

$$\Bigg(\cos\theta\sin\theta\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\Big) + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big) \text{ とまとめてもよい }\Bigg).$$

3 【配点】 $8 + 10 = 18$

$\frac{d}{dx}\mathrm{Tan}^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ に注意して, $f(x,y)$ の２次 (= ２階) 以下の偏導関数を計算すると,

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy}(x,y)\ (= f_{yx}(x,y)) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(2) 上の結果を用いて, $z = f(x,y)$ の $(1,-1)$ における Taylor 展開の係数は

$$c_{00} = f(1,-1) = \boxed{-\frac{\pi}{4}}, \quad c_{10} = f_x(1,-1) = \boxed{\frac{1}{2}}, \quad c_{01} = f_y(1,-1) = \boxed{\frac{1}{2}},$$

$$c_{20} = \frac{1}{2}f_{xx}(1,-1) = \boxed{-\frac{1}{4}}, \quad c_{02} = \frac{1}{2}f_{yy}(1,-1) = \boxed{\frac{1}{4}}, \quad c_{11} = f_{xy}(1,-1)\ (= f_{yx}(1,-1)) = \boxed{0}.$$

(1) 曲面 $z = f(x,y)$ の点 $\big(1,-1,-\frac{\pi}{4}\big)$ における接平面の方程式は, 関数 $z = f(x,y)$ の $(1,-1)$ における Taylor 展開の１次の項までをとれば得られる:

$$z = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y+1), \quad \text{すなわち} \quad \boxed{x + y - 2z = \frac{\pi}{2}} \quad \Big(\text{あるいは}\quad z = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{\pi}{4}\Big).$$

この平面は $(1,1,-2)$ を法線ベクトルとするので, 点 $\big(1,-1,-\frac{\pi}{4}\big)$ における法線の方程式は

$$\boxed{x - 1 = y + 1 = \frac{z + \frac{\pi}{4}}{-2}} \quad \left(\text{あるいは} \begin{cases} x = t + 1\\ y = t - 1\\ z = -2t - \frac{\pi}{4}\end{cases} (t\text{ は媒介変数})\right).$$

4 【配点】 $12+10=22$

(1) まず, $f(x,y)=x^3+xy^2+x^2-2xy$ の 2 次 (= 2 階) までの偏導関数を計算しておく :

$$f_x(x,y)=3x^2+y^2+2x-2y,\quad f_y(x,y)=2xy-2x,$$
$$f_{xx}(x,y)=6x+2,\quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=2y-2,\quad f_{yy}(x,y)=2x.$$

f の停留点は, $f'(x,y)=(0,0)$, すなわち

$$f_x(x,y)=3x^2+2x+y(y-2)=0,\qquad f_y(x,y)=2x(y-1)=0\ \ (\Leftrightarrow\ x=0\ \text{ or }\ y=1)$$

を解くことにより, $\boxed{(0,0),(0,2),(-1,1),\left(\frac{1}{3},1\right)}$. 次に, $f''(x,y)=\begin{bmatrix}6x+2 & 2y-2\\ 2y-2 & 2x\end{bmatrix}$ を用いて, f の各停留点で極値の判定を行う.

- $f''(0,0)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$, $f''(0,2)=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ より, $\det f''(0,0)=\det f''(0,2)=-4<0$. よって, $(0,0),(0,2)$ は f の鞍点であり, 極値をとらない.
- $f''(-1,1)=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, $f''(\frac{1}{3},1)=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & \frac{2}{3}\end{bmatrix}$ より, $\det f''(-1,1)=8>0$, $\det f''(\frac{1}{3},1)=\frac{8}{3}>0$ であり, $f_{xx}(-1,1)=-4<0$, $f_{xx}(\frac{1}{3},1)=4>0$. よって, f は

$$\boxed{(-1,1)\ \text{で 極大値}\ 1}\ \text{をとり,}\ \boxed{\left(\frac{1}{3},1\right)\ \text{で 極小値}\ -\frac{5}{27}}\ \text{をとる.}$$

(2) $f(-1,2)=0$, $f_y(-1,2)=-2\neq 0$ より, 確かに $f(x,y)=0$ は点 $(-1,2)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ を定める. $x^3+xy^2+x^2-2xy=0\ \ (y=\varphi(x))$ を x で微分して (x での微分を $'$ で表す),

$$3x^2+y^2+2xyy'+2x-2y-2xy'=0.\qquad \therefore\ 2x(y-1)y'+3x^2+2x+y^2-2y=0.$$

もう 1 度, 両辺を x で微分して,

$$2x(y-1)y''+2(y-1)y'+2x(y')^2+6x+2+2(y-1)y'=0.$$
$$\therefore\ x(y-1)y''+2(y-1)y'+x(y')^2+3x+1=0.$$

よって, $\varphi(-1)=2$ に注意して,

$$-2\varphi'(-1)+1=0,\quad -\varphi''(-1)+2\varphi'(-1)-\varphi'(-1)^2-2=0.\qquad \therefore\ \varphi'(-1)=\frac{1}{2},\quad \varphi''(-1)=-\frac{5}{4}.$$

以上より, $\varphi(x)$ の $x=-1$ における Taylor 展開の係数は

$$c_0=\varphi(-1)=\boxed{2},\quad c_1=\varphi'(-1)=\boxed{\frac{1}{2}},\quad c_2=\frac{1}{2}\varphi''(-1)=\boxed{-\frac{5}{8}}.$$

5 【配点】 $8+4=12$

(1) まず, $g(x,y)=2x^2+y^2-1$ に対して, 曲線 $g(x,y)=0$ 上では $g'(x,y)=(4x,2y)\neq(0,0)$ であることに注意する. 次に, $F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2x^2+y^2-1)$ とおいて,

$$F_x(x,y,\lambda)=y-4\lambda x=0,\quad F_y(x,y,\lambda)=x-2\lambda y=0,\quad F_\lambda(x,y,\lambda)=-(2x^2+y^2-1)=0$$

を解く. 最初の 2 式より, $\begin{bmatrix}-4\lambda & 1\\ 1 & -2\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$. $(x,y)=(0,0)$ は第 3 式を満足しないから,

$$\begin{vmatrix}-4\lambda & 1\\ 1 & -2\lambda\end{vmatrix}=8\lambda^2-1=0,\quad \text{すなわち}\ \ \lambda=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

が得られる. (第 1 式から $y=4\lambda x$, これを第 2 式に代入して $x(1-8\lambda^2)=0$. $x=0$ なら $y=0$ となり第 3 式が成り立ち得ない.... というように議論してもよい.) これより,

$$(x,y,\lambda)=\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\ \left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\quad \text{(複号同順).}$$

従って, Lagrange の未定乗数法から得られる極値点 (極値を与える点) の候補は次の 4 点 :

$$\boxed{\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\quad \text{(複号同順).}$$

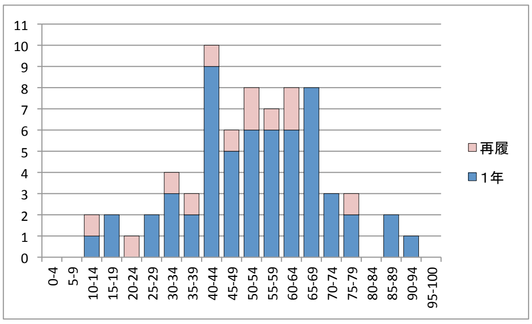
(2) このとき, 閉曲線 $2x^2+y^2=1$ に沿って $(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})\to(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})\to(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}})\to(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ の順に $f(x,y)$

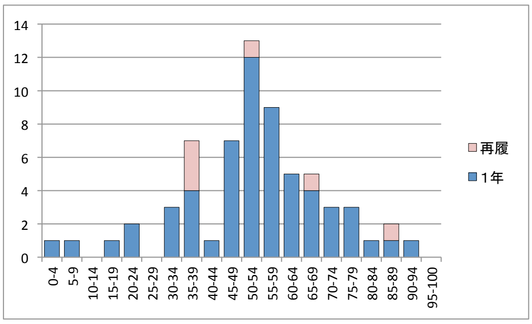
の値の変化を見れば, $f(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ であるから,

$$\boxed{\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ で極大値 } \frac{1}{2\sqrt{2}}}, \quad \boxed{\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ で極小値 } -\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

をとることが分かる.

《別法》教科書の例題 4.4.4 (p.105) に倣って, 次のように解答することもできる (手間は掛かる). まず, (1) で求めた極値点の候補の勝手な 1 つを (a, b) とすれば, この点の近くで $2x^2 + y^2 = 1$ は $y = \varphi(x)$ の形の陰関数を定める. ここで, $p(x) = f(x, \varphi(x)) = x\varphi(x)$ と定めれば, $x = a$ の近傍で, $p'(x) = x\varphi'(x) + \varphi(x)$, $p''(x) = x\varphi''(x) + 2\varphi'(x)$ ($\varphi'(a) = 0$ であることに注意). 一方, $2x^2 + \varphi(x)^2 = 1$ であるから, $2x + \varphi(x)\varphi'(x) = 0$, $2 + \varphi'(x)^2 + \varphi(x)\varphi''(x) = 0$ となり, $\varphi'(x) = \dfrac{-2x}{\varphi(x)}$, $\varphi''(x) = -\dfrac{2 + \varphi'(x)^2}{\varphi(x)} = -\dfrac{2(2x^2 + \varphi(x)^2)}{\varphi(x)^3} = \dfrac{-2}{\varphi(x)^3}$. よって, $p''(x) = \dfrac{-2x}{\varphi(x)}\left(2 + \dfrac{1}{\varphi(x)^2}\right)$ と表されるので, a と $b = \varphi(a)$ が同符号なら $p''(a) < 0$ となり点 (a, b) は極大値を与え, 異符号なら $p''(a) > 0$ となり点 (a, b) は極小値を与えることが分かる.





クラス 3	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	58	53.0	17.1	92
再履	12	42.7	17.7	75

クラス 6	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	59	52.6	17.5	93
再履	6	52.8	18.8	88