$\boxed{\text{微分積分学第二}}$《期末試験》

2015. 2. 16 (Mon) 2 限 実施

$\boxed{\text{各 8 点 (100 点以上切り捨て)}}$ 解答する順序は任意でよい. 結果のみでなく, 計算の過程も書くこと.

1 次の重積分あるいは 3 重積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} (x+y)^2\,dxdy,\qquad D_1 : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \sin(2x+y)\,dxdy,\qquad D_2 : 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

(3) $\displaystyle\iint_{D_3} \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dxdy,\qquad D_3 : x^2+y^2 \leqslant 1,\ x > 0.$

(4) $\displaystyle\iiint_{D_4} x\,dxdydz,\qquad D_4 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1.$

2 適当な変数変換を行うことにより, 次の重積分または 3 重積分を計算せよ.

(5) $\displaystyle\iint_{E_1} x^2y^4\,dxdy,\qquad E_1 :\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 2.$

(6) $\displaystyle\iint_{E_2} \frac{x-y}{1+(x+y)^2}\,dxdy,\qquad E_2 :\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x+y \leqslant 1.$

(7) $\displaystyle\iint_{E_3} y\,dxdy,$ $\qquad E_3 :$ 曲線 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ と x 軸で囲まれる部分.

(8) $\displaystyle\iiint_{E_4} \frac{x\,e^{-x^2-y^2-z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz,\qquad E_4 :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ (x,y,z) \neq (0,0,0)$

3 次の線積分を計算せよ. 但し, (9) は弧長に関する線積分を表す.

(9) $\displaystyle\int_{C_1} x\,ds,\qquad C_1 :\ x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t\ \ (0 \leqslant t \leqslant \pi/2).$

(10) $\displaystyle\int_{C_2} 2y\,dx + x\,dy,\qquad C_2 :\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (正の向きに 1 周).

4 次の体積を求めよ.

(11) 平面 $z = x + 2y$ と放物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ で囲まれる部分の体積 V_1.

(12) $0 \leqslant x+y \leqslant 1,\ 0 \leqslant y+z \leqslant 2,\ 0 \leqslant z+x \leqslant 3$ で与えられる部分の体積 V_2.

(13) 円錐 $0 \leqslant z \leqslant 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2 \leqslant 1)$ と円柱 $x^2+y^2 \leqslant x$ の共通部分の体積 V_3.

5 次の面積を求めよ.

(14) 平面曲線 $(x^2+y^2)^3 = x^2$ で囲まれる部分のうちで $x \geqslant 0$ の側にある部分の面積 S_1.

(15) 曲面 $z = x^2 + y^2$ の平面 $z = 2$ より下にある部分の面積 S_2.

(16) 空間の極座標 (r, θ, φ) で表された曲面 $r = 1 + \cos\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ のうちで xy 平面より上にある部分の面積 S_3.

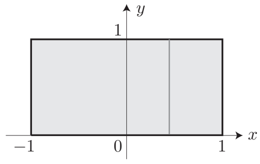
クラス 3, 6　担当：伊東（数学）

$\boxed{\text{微分積分学第二}}$《期末試験》【解答例】

2015. 2. 16 (Mon) 2 限 実施

$\boxed{1}$ (1)《与式》$= \displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_0^1 (x^2+2xy+y^2)\,dy = \int_{-1}^{1} \Big[\, x^2y + xy^2 + \frac{y^3}{3} \,\Big]_{y=0}^{y=1} dx$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(x^2 + x + \frac{1}{3} \Big)\,dx = \Big[\, \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \,\Big]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{4}{3}}.$$



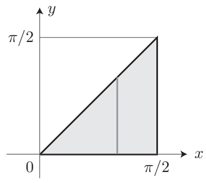
もちろん展開せずに計算してもよい.

【別法】《与式》$= \displaystyle\int_0^1 dy \int_{-1}^{1} (x^2+2xy+y^2)\,dx = 2\int_0^1 dy \int_0^1 (x^2+y^2)\,dx = 2\int_0^1 \Big(\frac{1}{3}+y^2\Big)dx = \frac{4}{3}.$

ここで, 第二の等号は積分区間 $[-1,1]$ の 0 に関する対称性による.

(2)《与式》$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^x \sin(2x+y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\cos(2x+y) \Big]_{y=0}^{y=x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 3x + \cos 2x)\,dx = \Big[-\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 2x}{2} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

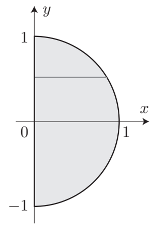


【別法】《与式》$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x+y)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\frac{1}{2}\cos(2x+y) \Big]_{x=y}^{x=\frac{\pi}{2}} dy$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \cos 3y)\,dy = \frac{1}{2}\Big[\sin y + \frac{\sin 3y}{3} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

(3)《与式》$= \displaystyle\iint_{\substack{-1\leqslant y\leqslant 1\\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dxdy = \int_{-1}^{1} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{1}{3}\frac{x^3}{\sqrt{1-y^2}} \Big]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (1-y^2)\,dy = \frac{2}{3}\Big(1-\frac{1}{3}\Big) = \boxed{\frac{4}{9}}.$$



【別法】《与式》$= \displaystyle\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int_0^1 \Big[x^2\,\mathrm{Sin}^{-1}\,y \Big]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx$

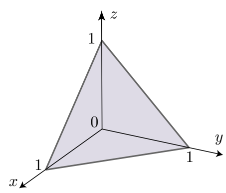
$$= 2\int_0^1 x^2\ \mathrm{Sin}^{-1}\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta \quad (x=\cos\theta)$$

$$= -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\,\{\cos^3\theta\}'\,d\theta = -\frac{2}{3}\bigg(\Big[\theta\cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta \bigg) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

(4)《与式》$= \displaystyle\iiint_{\substack{x+y+z\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0}} x\,dxdydz = \iint_{\substack{x+y\leqslant 1\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}} dxdy \int_0^{1-x-y} x\,dz$

$$= \iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant 1-x\\ 0\leqslant x\leqslant 1}} x(1-x-y)\,dxdy = \int_0^1 \Big[x(1-x)y - \frac{1}{2}xy^2 \Big]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\bigg\{ \Big[-\frac{1}{3}x(1-x)^3 \Big]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x)^3\,dx \bigg\} = \boxed{\frac{1}{24}}.$$



$\boxed{2}$ (5) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ (平面の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$. この変数変換により E_1 は $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ に対応するから,

$$《与式》= \iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi}} (r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^4\cdot r\,drd\theta = \bigg(\int_0^{\sqrt{2}} r^7\,dr \bigg)\bigg(\int_0^{\pi} \cos^2\theta\sin^4\theta\,d\theta \bigg).$$

ここで, 三角関数の積分の部分は

$$\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin^4\theta \, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4\theta - \sin^6\theta)\, d\theta = 2\Big(1-\frac{5}{6}\Big)\frac{3}{4}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16},$$

$$\text{あるいは}\quad = B\Big(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(4)} = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{3!} = \frac{\pi}{16}.$$

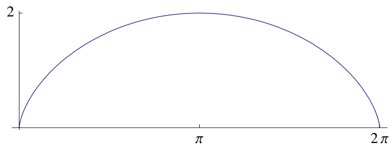
よって, 《与式》$= \Big[\dfrac{r^8}{8}\Big]_0^{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\pi}{16} = \boxed{\dfrac{\pi}{8}}$.

(6) $u = x+y,\ v = x-y$ とおけば, $x = \dfrac{u+v}{2},\ y = \dfrac{u-v}{2},\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{2}$. この変数変換により E_2 は $0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant u$ に対応するから,

$$《与式》= \iint_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\ 0\leqslant v\leqslant u}} \frac{v}{1+u^2}\cdot\Big|-\frac{1}{2}\Big|\, dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{1+u^2}\, dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2} du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+u^2}\Big)\, du = \frac{1}{4}\Big[\,u - \mathrm{Tan}^{-1} u\,\Big]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)}.$$

(7) この曲線 (サイクロイド) を $y = \varphi(x)\ (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ と表せば,



$$《与式》= \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\varphi(x)} y\, dy = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)^2}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2 \frac{dx}{dt}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3\, dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \sin^6\frac{t}{2}\, dt = 8\int_0^{\pi} \sin^6 u\, du = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u\, du = 16\cdot\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{5\pi}{2}}.$$

(8) $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$ (空間の極座標) とおけば, $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$. この変数変換により E_4 は $0 < r < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ に対応するから,

$$《与式》= \iiint_{\substack{0\leqslant r<\infty\\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}} \frac{(r\sin\theta\cos\varphi)e^{-r^2}}{r}\cdot r^2\sin\theta\, drd\theta d\varphi$$

$$= \Big(\int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2}\, dr\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta\Big)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi\Big) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2}\, dr.$$

最後の広義積分は次のように計算できる:

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2}\, dr = \frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \quad \Big(\Gamma(s) = 2\int_0^{\infty} x^{2s-1}e^{-x^2}\, dx,\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \text{ に注意}\Big)$$

あるいは $\{e^{-r^2}\}' = -2re^{-r^2}$ に注意して,

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-r^2}\, dr = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} r\cdot\{e^{-r^2}\}'\, dr = \frac{1}{2}\Big(-\Big[\,re^{-r^2}\Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, dr\Big) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

よって, 《与式》$= \dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{\pi}}{4} = \boxed{\dfrac{\pi\sqrt{\pi}}{16}}$.

3

(9) 説明の便宜のため $x(t) = \cos^3 t,\ y(t) = \sin^3 t$ とおく. このとき,

$$《与式》= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\cdot 3\cos t\sin t\, dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin t\, dt \overset{\cos t = u}{=} 3\int_0^1 u^4\, du = \boxed{\frac{3}{5}}.$$

(10) 曲線 C_2 は $x = x(\theta) := 2\cos\theta,\ y = y(\theta) := 3\sin\theta\ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ と媒介変数表示される．よって，

$$\text{《与式》} = \int_0^{2\pi} \{2y(\theta)x'(\theta) + x(\theta)y'(\theta)\}\,d\theta = \int_0^{2\pi} (-12\sin^2\theta + 6\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \{-6(1-\cos 2\theta) + 3(1+\cos 2\theta)\}\,d\theta = \int_0^{2\pi} (-3 + 9\cos 2\theta) = \boxed{-6\pi}.$$

【別法】 曲線 C_2 (長径 6, 短径 4 の楕円) の囲む閉領域を D とすれば, Green の定理により

$$\int_{C_2} x\,dy = -\int_{C_2} y\,dx = \iint_D dxdy = (D\text{ の面積}) = 6\pi.$$

よって,《与式》$= -2\cdot 6\pi + 6\pi = \boxed{-6\pi}$.

4 (11) 平面と放物面の交線は $z = x+2y = 1-x^2-y^2$ と表される．これより x, y の関係式 $x^2+y^2+x+2y=1$, すなわち $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 = (\frac{3}{2})^2$ を得る．よって, 考えている部分は $(x+\frac{1}{2})^2 + (y+1)^2 \leqslant (\frac{3}{2})^2$ 上で定義された 2 つの関数のグラフ $z = x+2y,\ z = 1-x^2-y^2$ で囲まれる部分であるから, その体積は

$$V_1 = \iiint_{\substack{(x+\frac{1}{2})^2+(y+1)^2 \leqslant (\frac{3}{2})^2 \\ x+2y \leqslant z \leqslant 1-x^2-y^2}} dxdydz = \iint_{(x+\frac{1}{2})^2+(y+1)^2 \leqslant (\frac{3}{2})^2} \{(1-x^2-y^2) - (2x-y)\}\,dxdy$$
$$= \iint_{(x+\frac{1}{2})^2+(y+1)^2 \leqslant (\frac{3}{2})^2} \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - (y+1)^2\right\} dxdy$$
$$= \iint_{x^2+y^2 \leqslant (\frac{3}{2})^2} \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - x^2 - y^2\right\} dxdy \quad (\text{平行移動})$$
$$= \iint_{\substack{0 \leqslant r \leqslant \frac{3}{2} \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}} \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - r^2\right\} r\,drd\theta \quad (\text{極座標変換})$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{4}r - r^3\right) dr = 2\pi \left[\frac{9}{8}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{81\pi}{32}}.$$

(12) $u = x+y,\ v = y+z,\ w = z+x$ とおけば, $x = \frac{1}{2}(u-v+w),\ y = \frac{1}{2}(u+v-w),\ z = \frac{1}{2}(-u+v+w)$ であって, Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

この変数変換により問題の部分は $0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 2,\ 0 \leqslant w \leqslant 3$ に対応するから, 求める体積は

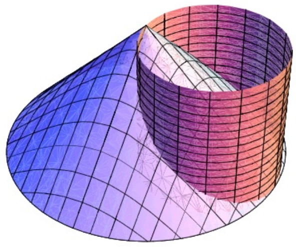
$$V_2 = \iiint_{\substack{0 \leqslant x+y \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y+z \leqslant 1 \\ 0 \leqslant z+x \leqslant 1}} dxdydz = \iiint_{\substack{0 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant v \leqslant 2 \\ 0 \leqslant w \leqslant 3}} \frac{1}{2}\,dudvdw = \boxed{3}.$$

Jacobian の計算については, 先に $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$ を求めてから, この逆数として $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{2}$ が得られる．実際, 逆写像定理により, x, y, z の u, v, w に関する Jacobi 行列と u, v, w の x, y, z に関する Jacobi 行列とは互いに他の逆行列となっている．

(13) 求める体積は

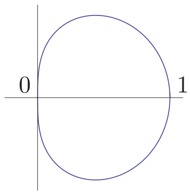
$$V_3=\iiint_{\substack{0\leqslant z\leqslant 1-\sqrt{x^2+y^2}\\ x^2+y^2\leqslant x}} dxdydz=\iint_{x^2+y^2\leqslant x}(1-\sqrt{x^2+y^2}\,)\,dxdy.$$

ここで極座標 (r,θ) を用いれば, $x^2+y^2\leqslant x$ は $0\leqslant r\leqslant\cos\theta$ $(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ と表されるので,



$$V_3=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\cos\theta\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}}(1-r)\,r\,drd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}(r-r^2)\,dr$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{\cos^2\theta}{2}-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big)\,d\theta=2\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\Big)=\boxed{\frac{\pi}{4}-\frac{4}{9}}.$$

5 (14) 曲線を極座標 (r,θ) で表すと $(r^2)^3=(r\cos\theta)^2$, すなわち $r^4=\cos^2\theta$. よって, $x\geqslant 0$ の範囲で曲線は $r=\sqrt{\cos\theta}$ $(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$ と表され, 求める面積は



$$S_1=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{\cos\theta}\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}}} r\,drd\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt{\cos\theta}\,)^2\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\boxed{1}.$$

(15) 考えている曲面の部分は関数 $z=x^2+y^2$ $(x^2+y^2\leqslant 2)$ のグラフに他ならない. $z=x^2+y^2$ に対して, $z_x=2x$, $z_y=2y$ より, $\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}=\sqrt{4(x^2+y^2)+1}$. よって, グラフの面積に関する公式および極座標変換を用いて, 求める面積は

$$S_2=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\,dxdy=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dxdy$$
$$=\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}\sqrt{4r^2+1}\,r\,drd\theta=\Big(\int_0^{\sqrt{2}}r\sqrt{4r^2+1}\,dr\Big)\Big(\int_0^{2\pi}d\theta\Big)$$
$$=2\pi\Big[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{6}(27-1)=\boxed{\frac{13\pi}{3}}.$$

(16) 考えている曲面 (Γ とする) は

$$\Big\{\big((1+\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi,(1+\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi,(1+\cos\theta)\cos\theta\big)\ \Big|\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\Big\}$$

と表される. ここで, $\boldsymbol{r}=\big((1+\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi,(1+\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi,(1+\cos\theta)\cos\theta\big)$ とおけば,

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=((\cos\theta+\cos2\theta)\cos\varphi,(\cos\theta+\cos2\theta)\sin\varphi,-(\sin\theta+\sin2\theta)),$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=(-(1+\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi,(1+\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi,0),$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}=(1+\cos\theta)\sin\theta\Big((\sin\theta+\sin2\theta)\cos\varphi,\ (\sin\theta+\sin2\theta)\sin\varphi,\ (\cos\theta+\cos2\theta)\Big),$$
$$\Big|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}\Big|=(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{(\sin\theta+\sin2\theta)^2+(\cos\theta+\cos2\theta)^2}$$
$$=(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2+2(\sin\theta\sin2\theta+\cos\theta\cos2\theta)}=(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$
$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cdot2\cos\frac{\theta}{2}=8\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}.$$

よって, 曲面 Γ の面積は

$$S_3=\iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}}8\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta d\varphi=8\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\Big)\Big(\int_0^{2\pi}d\varphi\Big)$$
$$=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta=32\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1u^4\,du=\frac{32\pi}{5}\Big(1-\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big)=\boxed{\frac{4\pi}{5}(8-\sqrt{2}\,)}.$$

【別法】 曲面 Γ と yz 平面との交線 ($y\geqslant 0$ の部分) を C とすれば, Γ は C を z 軸の周りに 1 回転して得

られる．一方，曲線 C は

$$z=(1+\cos\theta)\cos\theta,\quad y=(1+\cos\theta)\sin\theta\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

と媒介変数表示される．よって，回転面の面積の公式を用いて，

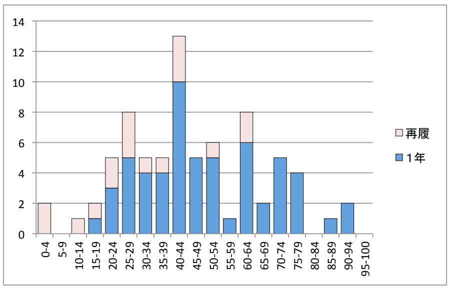
$$\begin{aligned}S_3&=2\pi\int_0^2 y\sqrt{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}\,dz=2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\sqrt{\left(\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dz}{d\theta}}\right)^2+1}\,\frac{dz}{d\theta}\,d\theta\quad(z=(1+\cos\theta)\cos\theta\text{ で置換})\\&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\quad\left(\frac{dz}{d\theta}=-(\sin\theta+\sin 2\theta)\leqslant 0\text{ に注意}\right).\end{aligned}$$

ここで，

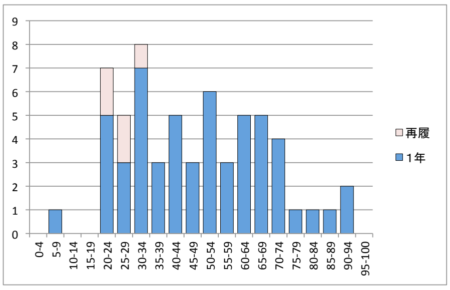
$$\sqrt{\left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{(\sin\theta+\sin 2\theta)^2+(\cos\theta+\cos 2\theta)^2}=\sqrt{2(1+\cos\theta)}=2\cos\frac{\theta}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}S_3&=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos\theta)\sin\theta\cdot 2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta\\&=32\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^4\,du=\frac{32\pi}{5}\left(1-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{4\pi}{5}(8-\sqrt{2}).\end{aligned}$$



クラス 3



クラス 6

クラス 3	人 数	平均点	最高点
1 年	58	50.5	94
再履	17	31.9	64
全体	75	45.9	94

クラス 6	人 数	平均点	最高点
1 年	55	50.3	94
再履	5	26.0	32
全体	60	47.8	94

クラス 6/クラス 3　担当：伊東（数学）