微分積分学第二 【中間試験】

2014. 12. 19/22 (Fri/Mon) 実施

1 次の問いに答えよ.

(1) 2 変数関数 $f(x,y) = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$ に対して, 1 変数関数 $f(2t, 1-t^2)$ の導関数 $\dfrac{d}{dt}f(2t,1-t^2)$ を計算せよ.

(2) 2 変数関数 $g(t,x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ $(t>0)$ に対して, $g_t - g_{xx}$ を計算せよ.

(3) 関数 $z = h(r)$ $(r>0)$ は, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $((x,y) \neq (0,0))$ と合成することにより, (x,y) の関数と見なされる. このとき, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を $\dfrac{dz}{dr}$, $\dfrac{d^2 z}{dr^2}$ を用いて表せ.

2 関数 $z = f(x,y)$ は, 極座標変換 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ により, r, θ の関数と見ることができる.

(1) x, y の r, θ に関する Jacobi（ヤコビ）行列 および Jacobian（ヤコビアン）を定義に従って計算せよ.

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を用いて表せ.

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$ を用いて表せ.

3 関数 $g(x,y) = x(x^2+2y^2-6)$ について次の問いに答えよ.

(1) xyz 空間の曲面 $z = g(x,y)$ の点 $(-1,2,-3)$ における接平面および法線の方程式を求めよ.

(2) 関数 $g(x,y)$ の停留点をすべて求めよ.

(3) 関数 $g(x,y)$ の極値を求めよ.

4 xy 平面の曲線 $xy^2 - x^3y - 2 = 0$ が点 $(1,-1)$ の近傍で定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とする.

(1) 曲線 $y = \varphi(x)$ の点 $(1,-1)$ における接線および法線の方程式を求めよ.

(2) 関数 $\varphi(x)$ の $x=1$ における Taylor（テーラー）展開

$$\varphi(x) = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + \cdots$$

の係数 c_0, c_1, c_2 を求めよ.

5 関数 $f(x,y) = xy$ の条件 $2x^2+y^2=1$ の下での極値を考える.

(1) Lagrange（ラグランジュ）の未定乗数法により得られる極値点 (極値をとる点) の候補をすべて挙げよ.

(2) 閉曲線 $2x^2+y^2=1$ の上で $f(x,y)$ は必ず最大値と最小値をとる. この考察と (1) の結果から極値を決定せよ.

クラス 6/クラス 3　担当：伊東（数学）

$\boxed{\text{微分積分学第二}}$ 【中間試験】《解答例》 2014. 12. 19/22 (Fri/Mon) 実施

$\boxed{1}$ 【配点】 $8+8+10=26$

(1) $f(x,y)=\mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x}$ の偏導関数は

$$f_x(x,y)=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad f_y(x,y)=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

よって, 合成関数の微分公式を用いて,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(2t,1-t^2)&=f_x(2t,1-t^2)\cdot 2+f_y(2t,1-t^2)\cdot(-2t)\\&=\frac{-(1-t^2)}{(2t)^2+(1-t^2)^2}\cdot 2+\frac{2t}{(2t)^2+(1-t^2)^2}\cdot(-2t)=\frac{-2-2t^2}{(1+t^2)^2}=\boxed{\frac{-2}{1+t^2}}.\end{aligned}$$

(2) $g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$ より,

$$\begin{aligned}g_t(x,t)&=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\Big(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{x^2}{4t^2}\Big)e^{-\frac{x^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{-2t+x^2}{4t^2}e^{-\frac{x^2}{4t}},\\ g_{xx}(x,t)&=\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\Big(-\frac{x}{2t}\Big)e^{-\frac{x^2}{4t}}\Big\}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\Big\{-\frac{1}{2t}+\Big(-\frac{x}{2t}\Big)^2\Big\}e^{-\frac{x^2}{4t}}=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{-2t+x^2}{4t^2}e^{-\frac{x^2}{4t}}.\end{aligned}$$

よって, $g_t-g_{xx}=\boxed{0}$.

(3) まず, 合成関数の微分の公式を用いて,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{dz}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\Big)=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{dz}{dr}\Big)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}=\frac{d^2z}{dr^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{dz}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}.$$

ここで, $r=\sqrt{x^2+y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x}&=\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{y}{r},\\ \frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)=x\cdot(-\frac{1}{2})(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-xy(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{xy}{r^3}.\end{aligned}$$

以上より,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\frac{x}{r}\frac{dz}{dr}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x}{r}\frac{y}{r}\frac{d^2z}{dr^2}-\frac{xy}{r^3}\frac{dz}{dr}=\boxed{\frac{xy}{r^2}\Big(\frac{d^2z}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}\Big)}.$$

$\boxed{2}$ 【配点】 $8+8+10=26$

(1) (x,y) の (r,θ) に関する Jacobi 行列は $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\ \sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}}$.

対応する Jacobian (= Jacobi 行列式) は $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\ \sin\theta&r\cos\theta\end{vmatrix}=\boxed{r}$.

(2) $\Big(\frac{\partial z}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)=\Big(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r}&\frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r}&\frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}=\Big(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\Big)\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\ \sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}$ より,

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}},\quad \frac{\partial z}{\partial\theta}=\boxed{-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}}.$$

(3) (2) より $\Big(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\Big)=\Big(\frac{\partial z}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\ \sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}^{-1}=\Big(\frac{\partial z}{\partial r},\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ -\frac{\sin\theta}{r}&\frac{\cos\theta}{r}\end{pmatrix}$ であるから,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\boxed{\cos\theta\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}.$$

更に, これを用いて,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)=\Big(\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)$$

$$=\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)-\frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)$$

$$=\cos\theta\Big(\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}\Big)$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\Big(\cos\theta\,\frac{\partial z}{\partial r}+\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\Big)$$

$$=\cos\theta\sin\theta\,\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

$$=\boxed{\cos\theta\sin\theta\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}\Big)+\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}-\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}},$$

$$\text{or}\ \boxed{\cos\theta\sin\theta\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r}\Big)+(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)},$$

$$\text{or}\ \boxed{\frac{xy}{x^2+y^2}\Big(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\,\frac{\partial z}{\partial r}\Big)+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big(\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}\Big)}.$$

3 【配点】 $(4+3)+6+8=21$

まず $g(x,y)=x(x^2+2y^2-6)=x^3+2xy^2-6x$ の 2 次 (= 2 階) までの偏導関数を計算しておく：

$$g_x(x,y)=3x^2+2y^2-6,\quad g_y(x,y)=4xy,$$
$$g_{xx}(x,y)=6x,\quad g_{xy}(x,y)=g_{yx}(x,y)=4y,\quad g_{yy}(x,y)=4x.$$

(1) $g_x(-1,2)=5$, $g_y(-1,2)=-8$ より, $(-1,2,-3)$ における接平面の方程式は

$$z+3=5(x+1)-8(y-2).\quad\therefore\ \boxed{z=5x-8y+18}\quad(\text{or}\ \boxed{5x-8y-z+18=0}).$$

この平面は $(5,-8,-1)$ を法線ベクトルとするので, $(-1,2,-3)$ における法線の方程式は

$$\boxed{\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z+3}{-1}}\quad\left(\text{or}\ \boxed{\begin{cases}x=-1+5t\\ y=2-8t\quad(t\ \text{は媒介変数})\\ z=-3-t\end{cases}}\right).$$

(2) $g'(x,y)=(0,0)$, すなわち $g_x(x,y)=g_y(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) が g の停留点である.

$$g_x(x,y)=3x^2+2y^2-6=0,\quad g_y(x,y)=4xy=0\ (\Leftrightarrow\ x=0\ \text{or}\ y=0)$$

を解くことにより, g の停留点は, $\boxed{(0,\pm\sqrt{3}),\ (\pm\sqrt{2},0)}$.

(3) $g''(x,y)=\begin{pmatrix}6x & 4y\\ 4y & 4x\end{pmatrix}$ を用いて, g の各停留点で極値の判定を行う. (以下, 複号同順)

- $(0,\pm\sqrt{3})$ において, $g''(0,\pm\sqrt{3})=\begin{pmatrix}0 & \pm4\sqrt{3}\\ \pm4\sqrt{3} & 0\end{pmatrix}$ より, $\det g''(\pm\sqrt{3},0)=-48<0$. よって, $(\pm\sqrt{3},0)$ は g の鞍点となり, 極値をとらない.
- $(\pm\sqrt{2},0)$ において, $g''(\pm\sqrt{2},0)=\begin{pmatrix}\pm6\sqrt{2} & 0\\ 0 & \pm4\sqrt{2}\end{pmatrix}$ より, $\det g''(\pm\sqrt{2},0)=48>0$. よって, $g_{xx}(\pm\sqrt{2},0)=\pm6\sqrt{2}\gtrless 0$ および $g(\pm\sqrt{2},0)=\mp4\sqrt{2}$ に注意して, g は

$$\boxed{(\sqrt{2},0)\ \text{で 極小値}\ -4\sqrt{2}}\ \text{をとり,}\ \boxed{(-\sqrt{2},0)\ \text{で 極大値}\ 4\sqrt{2}}\ \text{をとる.}$$

4 【配点】 $(4+3)+8=15$

$f(x,y)=xy^2-x^3y-2$ とおけば, $f_y(x,y)=2xy-x^3$. $f(1,-1)=0$, $f_y(1,-1)=-3\neq0$ であるから, 確かに $f(x,y)=0$ は点 $(1,-1)$ の近傍で陰関数 $y=\varphi(x)$ を定める. $xy^2-x^3y-2=0$ $(y=\varphi(x))$ を x で微分して (x での微分を $'$ で表す),

$$y^2+2xyy'-3x^2y-x^3y'=0,\quad(2xy-x^3)y'+y^2-3x^2y=0.\quad\therefore\ y'=-\frac{y^2-3x^2y}{2xy-x^3}.$$

もう 1 度, 両辺を x で微分して,

$$(2xy - x^3)y'' + (2y + 2xy' - 3x^2)y' + 2yy' - 6xy - 3x^2y' = 0,$$

$$(2xy - x^3)y'' + (4y - 6x^2 + 2xy')y' - 6xy = 0. \qquad \therefore\ y'' = -\frac{(4y - 6x^2 + 2xy')y' - 6xy}{2xy - x^3}.$$

よって, $\varphi(1) = -1$ に注意して, $\varphi'(1) = -\dfrac{1+3}{-2-1} = \dfrac{4}{3}$, $\varphi''(1) = -\dfrac{(-4-6+\frac{8}{3})\frac{4}{3}+6}{-2-1} = -\dfrac{34}{27}$. これを用いて問題に答える.

(1) 接線の方程式は $y + 1 = \varphi'(1)(x-1) = \dfrac{4}{3}(x-1)$, 整理して $\boxed{y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{7}{3}}$ (or $\boxed{4x - 3y - 7 = 0}$). また, 法線の方程式は $y + 1 = -\dfrac{3}{4}(x-1)$, すなわち $\boxed{y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{4}}$ (or $\boxed{3x + 4y + 1 = 0}$).

(2) Taylor 展開の係数は, $c_0 = \varphi(1) = \boxed{-1}$, $c_1 = \varphi'(1) = \boxed{\dfrac{4}{3}}$, $c_2 = \dfrac{1}{2!}\varphi''(1) = \boxed{-\dfrac{17}{27}}$.

5

【配点】 $8 + 4 = 12$

(1) まず, $g(x,y) := 2x^2 + y^2 - 1$ に対して, 曲線 $g(x,y) = 0$ 上では $g' = (4x, 2y) \neq (0,0)$ であることに注意する. よって, $F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(2x^2 + y^2 - 1)$ とおいたとき,

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = y - 4\lambda x = 0, \\ F_y(x,y,\lambda) = x - 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = -(2x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

の解 (x,y) が極値点 (= 極値をとる点) の候補となる. 最初の 2 式より, $\begin{pmatrix} -4\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. 更に, 第 3 式より $(x,y) \neq (0,0)$ であるから,

$$\begin{vmatrix} -4\lambda & 1 \\ 1 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda^2 - 1 = 0, \quad \text{すなわち}\ \ \lambda = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

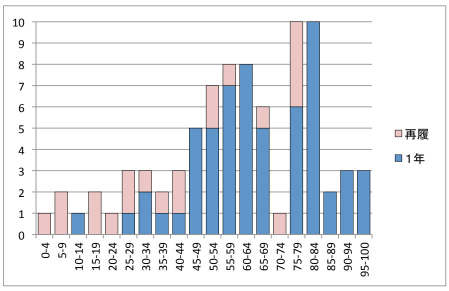
が得られる. (第 1 式から $y = 4\lambda x$, これを第 2 式に代入して $x(1 - 8\lambda^2) = 0$. $x = 0$ なら $y = 0$ となり第 3 式が成り立ち得ない.... というように議論してもよい.) これより,

$$(x,y,\lambda) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad (\text{複号同順}).$$

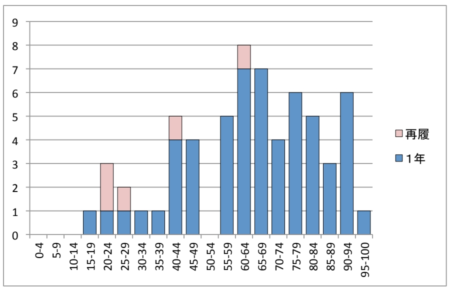
従って, Lagrange の未定乗数法による極値点の候補は次の 4 点 : $\boxed{\left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\pm\dfrac{1}{2}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

(2) $2x^2 + y^2 = 1$ は閉曲線であるから, 上の 4 点における xy の値を知れば, この閉曲線を一周する間の xy の増減が分かり, 極大値・極小値とそれを与える点を決定することができる. (あるいは次のように考えてもよい: 閉曲線 $2x^2 + y^2 = 1$ 上で $f(x,y)$ は必ず最大値, 最小値をとり, それらは明らかにそれぞれ極大値, 極小値となる.) よって, $f\left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, $f\left(\pm\dfrac{1}{2}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ より, 関数 $f(x,y) = xy$ は条件 $2x^2 + y^2 = 1$ の下で

$\boxed{\left(\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{で 極大値}\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$ をとり, $\boxed{\left(\pm\dfrac{1}{2}, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \text{で 極小値}\ -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$ をとる.



クラス 3



クラス 6

クラス 3	人 数	平均点	最高点
1 年	60	63.4	100
再履	21	42.2	77
全体	81	59.4	100

クラス 6	人 数	平均点	最高点
1 年	57	65.6	98
再履	5	35.2	62
全体	61	63.2	98