

1 次の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = 2x + y + 1$$

$$(3) \frac{dy}{dx} - 2xy = x$$

$$(4) \frac{dy}{dx} - y = xy^2 \quad (\text{Bernoulli の微分方程式})$$

2 1 階微分方程式  $(x+y)\frac{dy}{dx} - x + y = 0$  について次の問いに答えよ.

(1)  $(-x+y)dx + (x+y)dy = 0$  と変形したとき, これが完全微分形であることを示し, それに即した解法で一般解を求めよ.

(2) 同次形の方程式に変形できることを示し, それに即した解法で一般解を求めよ.

3 次の  $y = y(x)$  を未知関数とする定数係数線形微分方程式について, ① 対応する斉次方程式の基本解, ② 与えられた方程式の特殊解, ③ 与えられた方程式の一般解, をこの順に求めよ.

$$(1) y' + 3y = xe^{-2x}$$

$$(2) 2y'' - y' - 3y = e^{-x}$$

$$(3) y''' - y = e^x \sin x$$

4  $u = u(t)$  を未知関数とする 2 階微分方程式

$$u'' + au = \cos t \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

について考える. ここで,  $a$  は実定数とする.

(1)  $a > 0, a = 0, a < 0$  の場合に分けて, ① に対応する斉次方程式の基本解を求めよ.

(2)  $a \neq 1, a = 1$  の場合に分けて, ① の特殊解を求めよ.

(3) ① の一般解を求めよ.

5  $v = v(t)$  を未知関数とする 1 階微分方程式の初期値問題

$$v' = -1 - |v|v \quad (t \geq 0), \quad v(0) = 1 \quad (|v| \text{ は } v \text{ の絶対値を表す})$$

を考える. この問題の解  $v = v(t)$  (存在と一意性は講義で述べた定理で保証される) に対して,  $v(t_1) = 0$  を満たす  $t_1 > 0$  が存在し,  $v(t)$  は  $0 \leq t < t_1$  で正,  $t > t_1$  で負となる. このことを知って, 次の問いに答えよ.

(1)  $0 \leq t \leq t_1$  で  $|v| = v$  となることに注意して,  $0 \leq t \leq t_1$  での  $v(t)$  と  $t_1$  の値 を求めよ.

(2)  $t \geq t_1$  で  $|v| = -v$  となることに注意して,  $t \geq t_1$  での  $v(t)$  を求めよ.

1

(7 × 4 = 28 点)

1 階微分方程式のうち, 変数分離形, 1 階線形微分方程式, Bernoulli の微分方程式の問題である. 解法を大雑把に復習すると,

- 変数分離形:  $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ . 一般解は  $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$  ( $C$  は任意定数) で与えられる. また,  $g(\alpha) = 0$  を満たす定数  $\alpha$  が存在すれば, 定数関数  $y = \alpha$  も解となる (この解は特異解となる場合がある).
- 1 階線形微分方程式:  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ .  $p(x)$  の不定積分 (の 1 つ) を  $P(x) = \int p(x) dx$  (積分定数は勝手に選んでよい) とおけば, 一般解は  $y = e^{-P(x)} \left( \int e^{P(x)} q(x) dx + C \right)$  ( $C$  は任意定数) で与えられる. なお, 1 階線形微分方程式には特異解は現れない.

- Bernoulli の微分方程式:  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m$  ( $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, 1$ ).  $z = y^{1-m}$  とおくことにより,  $z$  の 1 階線形微分方程式となる ( $m = 0, 1$  なら既にそうになっている).

- (1)  $\frac{dy}{dx} = -2xy^2$  は変数分離形.  $y \neq 0$  のとき,  $\int \frac{dy}{y^2} = -\int 2x dx + C$  より,  $-\frac{1}{y} = -x^2 + C$  ( $C$  は任意定数). よって,  $y = \frac{1}{x^2 + C_1}$  ( $C_1 := -C$ ). 一方,  $y = 0$  (定数関数) は明らかに解. 以上より, 求める解は

$$y = \frac{1}{x^2 + C_1} \quad (C_1 \text{ は任意定数}) \quad \text{および} \quad y = 0.$$

- (2)  $z = 2x + y$  ( $x$  の関数) とおけば,  $\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx} = 2 + (z + 1) = z + 3$ .  $z \neq -3$  のとき,  $\int \frac{dz}{z + 3} = \int dx + C$  より,  $\log|z + 3| = x + C$  ( $C$  は任意定数). よって,  $z + 3 = C_1 e^x$  ( $C_1 := \pm e^C \neq 0$ ) となり,  $z = -3 + C_1 e^x$ . また,  $z = -3$  (定数関数) は  $C_1 = 0$  の場合に他ならない.  $z = 2x + y$  であったから, 解は  $y = -2x - 3 + C_1 e^x$  ( $C_1$  は任意定数).

【別法 1】  $\frac{dy}{dx} - y = 2x + 1$  と変形すれば, (定数係数) 1 階線形微分方程式.  $p(x) = -1, q(x) = 2x + 1$  とおいて,  $P(x) := \int p(x) dx = -x, e^{-P(x)} = e^x, \int e^{P(x)} q(x) dx = \int (2x + 1)e^{-x} dx = -(2x + 1)e^{-x} + \int 2e^{-x} dx = -(2x + 3)e^{-x}$ . 故に, 解は  $y = e^x \{ -(2x + 3)e^{-x} + C \}$ , すなわち  $y = -(2x + 3) + Ce^x$  ( $C$  は任意定数).

【別法 2】 定数係数線形微分方程式の解法を用いてもよい. まず, 対応する斉次方程式は, 特性多項式が  $F(t) = t - 1$  であるから, 基本解  $e^x$  をもつ. 次に, 特殊解として  $\frac{1}{D-1}(2x+1) = e^x \int e^{-x}(2x+1) dx = -(2x+3)$  をとり, 最後に一般解  $y = -(2x+3) + Ce^x$  ( $C$  は任意定数) を得る.

- (3)  $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$  は 1 階線形微分方程式.  $p(x) = -2x, q(x) = x$  とおいて,  $P(x) := \int p(x) dx = -x^2, e^{-P(x)} = e^{x^2}, \int e^{P(x)} q(x) dx = \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$ . よって, 求める解は  $y = e^{x^2} \left( -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \right)$ , すなわち  $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$  ( $C$  は任意定数).

【別法】  $\frac{dy}{dx} = x(2y + 1)$  と変形すれば, 変数分離形.  $y \neq -\frac{1}{2}$  のとき,  $\int \frac{dy}{2y + 1} = \int x dx + C$  ( $C$  は任意定数). これより,  $\frac{1}{2} \log|2y + 1| = \frac{1}{2} x^2 + C$  が導かれ,  $2y + 1 = C_1 e^{x^2}$  ( $C_1 := \pm e^{2C} \neq 0$ ). 従って  $y = -\frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$  を得る. 一方,  $y = -\frac{1}{2}$  (定数関数) は  $C_1 = 0$  の場合に他ならない. よって, 解は  $y = -\frac{1}{2} + C_1 e^{x^2}$  ( $C_1$  は任意定数).

- (4)  $y' - y = xy^2$  は Bernoulli の微分方程式 ( $m = 2$ ).  $y \neq 0$  のとき,  $z = y^{-1}$  ( $x$  の関数) とおけば,  $z' = -y^{-2} y' = -y^{-2}(y + xy^2) = -z - x$  より,  $z' + z = -x$  (1 階線形微分方程式). ここで,  $p(x) = 1, q(x) = -x$  とおいて,  $P(x) = \int p(x) dx = x, e^{-P(x)} = e^{-x}, \int e^{P(x)} q(x) dx = \int e^x (-x) dx = -xe^x +$

$\int e^x dx = (1-x)e^x$ . これより,  $z = e^{-x}\{(1-x)e^x + C\} = 1-x + Ce^{-x}$  ( $C$  は任意定数). 更に,  $y = z^{-1}$  より,  $y = \frac{1}{1-x+Ce^{-x}}$ . 一方,  $y = 0$  (定数関数) も解となる. よって, 求める解は  $y = \frac{1}{1-x+Ce^{-x}}$  ( $C$  は任意定数) および  $y = 0$ .

2

(7 × 2 = 14 点)

1 階微分方程式のうち, 同次形, 完全微分形の問題である. 解法を大雑把に復習すると,

- 同次形:  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ .  $z = \frac{y}{x}$  とおけば,  $y = xz$ ,  $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$  であるから, 与えられた微分方程式は  $z + x\frac{dz}{dx} = f(z)$ , すなわち  $\frac{dz}{dx} = \frac{f(z)-z}{x}$  と変形できる. これは変数分離形である (解法は既出).
- 完全微分形:  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ . 長方形領域  $D$  で  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  が成り立つならば,  $P = \frac{\partial F}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$  を満たす  $F(x, y)$  が存在し, 解が  $F(x, y) = C$  ( $C$  は任意定数) で与えられる. このような  $F$  は点  $(a, b) \in D$  を任意に固定し,

$$F(x, y) = \int_a^x P(\xi, b) d\xi + \int_b^y Q(x, \eta) d\eta \left( = \int_b^y Q(a, \eta) d\eta + \int_a^x P(\xi, y) d\xi \right)$$

で与えられる.

- (1)  $P(x, y) = -x + y$ ,  $Q(x, y) = x + y$  とおけば, 与えられた微分方程式は  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  と書ける. このとき  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$  であるから, これは完全微分形. ここで,  $(a, b) = (0, 0)$  として,

$$F(x, y) := \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta = \int_0^x (-\xi) d\xi + \int_0^y (x + \eta) d\eta = -\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$$

とおけば, 求める解は  $F(x, y) = C$ , すなわち  $-x^2 + 2xy + y^2 = C_1$  ( $C_1 = 2C$  は任意定数).

- (2)  $(x+y)\frac{dy}{dx} = x-y$  の両辺を  $x+y$  で割って,  $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$ . よって,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$  となり, これは同次形.  $z = \frac{y}{x}$  とおけば,  $y = xz$ ,  $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$  であるから,

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1-z}{1+z}. \quad \therefore x\frac{dz}{dx} \left( = \frac{1-z}{1+z} - z \right) = -\frac{z^2+2z-1}{z+1} \text{ (変数分離形).}$$

$z \neq -1 \pm \sqrt{2}$  のときは  $\int \frac{z+1}{z^2+2z-1} dz = -\int \frac{dx}{x}$  となり,  $\frac{1}{2} \log|z^2+2z-1| = -\log|x| + C$  ( $C$  は任意定数). これより,  $x^2(z^2+2z-1) = C_1$  ( $C_1 := \pm e^{2C} \neq 0$ ). 一方,  $z = -1 \pm \sqrt{2}$  (定数関数) も明らかに解であるが, これらは上式で  $C_1 = 0$  としたもの他にない. ここで,  $z = \frac{y}{x}$  を代入し整理して, 求める解は

$$-x^2 + 2xy + y^2 = C_1 \text{ (} C_1 \text{ は任意定数). 勿論, 解を } y = -x \pm \sqrt{2x^2 + C} \text{ と表示してもよい.}$$

3

(12 × 3 = 36 点)

定数係数線形微分方程式を  $F(D)y = q(x)$  ( $D = \frac{d}{dx}$ ) の形で表すとき,

$$[F(D)y = q(x) \text{ の一般解}] = [F(D)y = q(x) \text{ の特殊解}] + [F(D)y = 0 \text{ の一般解}]$$

が成り立つ (線形微分方程式には特異解は存在しないことに注意). ここで,  $[F(D)y = 0 \text{ の一般解}]$  は特性多項式  $F(t)$  の因数分解 (あるいは特性方程式  $F(t) = 0$  の根) を見ることにより得られる (詳細は教科書あるいは講義ノート参照, すぐ下の例も見よ). また,  $[F(D)y = q(x) \text{ の特殊解}]$  は  $\frac{1}{F(D)}q(x)$  を計算することにより得られるが, もっと簡単に計算できる場合もある ((1), (2) の中のコメント参照).  $\frac{1}{F(D)}q(x)$  の計算で必ず覚えておくべき公式として次の 2 つを挙げておく:

$$\bullet \frac{1}{D-a}q(x) = e^{ax} \int e^{-ax}q(x) dx, \quad \bullet F(a) \neq 0 \text{ ならば } \frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax}.$$

念のため、最も基本的な  $F(t) = at^2 + bt + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$  は定数,  $a \neq 0$ ) の場合について、斉次方程式  $F(D)y (= ay'' + by' + cy) = 0$  の基本解 (= 解空間の基底) および一般解について整理しておく ( $C_1, C_2$  は任意定数を表す).

- $F(t) = 0$  が 2 つの異なる実根  $\alpha, \beta$  をもつとき,  $F(D)y = 0$  の基本解は  $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$ . 従って, 一般解は  $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ .
- $F(t) = 0$  が 2 つの異なる虚根  $\gamma, \bar{\gamma}$  (共役複素数の組) をもつとき,  $\gamma = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$ ) とおけば,  $F(D)y = 0$  の基本解は  $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ . 従って, 一般解は  $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ .
- $F(t) = 0$  が 2 重根  $\alpha \in \mathbb{R}$  をもつとき,  $F(D)y = 0$  の基本解は  $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}$ . 従って, 一般解は  $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$ .

(1) 考える微分方程式は  $(D+3)y = x e^{-2x}$ . 斉次方程式の特性多項式は  $F(t) = t+3$ .

① 特性方程式  $F(t) = t+3 = 0$  の根が  $-3$  であるから, 斉次方程式の基本解は  $\boxed{e^{-3x}}$ .

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{D+3} x e^{-2x} = e^{-3x} \int e^{3x} \cdot x e^{-2x} dx = e^{-3x} \int x e^x dx = e^{-3x} \left( x e^x - \int e^x dx \right) = \boxed{(x-1)e^{-2x}}.$$

③ 以上より, 一般解は  $\boxed{y = (x-1)e^{-2x} + C e^{-3x}}$  ( $C$  は任意定数).

(2) 考える微分方程式は  $(2D^2 - D - 3)y = e^{-x}$ . 斉次方程式の特性多項式は  $F(t) = 2t^2 - t - 3 = (2t-3)(t+1)$ .

① 特性方程式  $F(t) = (2t-3)(t+1) = 0$  の根が  $-1, \frac{3}{2}$  であるから, 斉次方程式の基本解は  $\boxed{e^{-x}, e^{\frac{3x}{2}}}$ .

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{1}{2D^2 - D - 3} e^{-x} &= \frac{1}{D+1} \left( \frac{1}{2D-3} e^{-x} \right) = \frac{1}{D+1} \left( \frac{1}{2(-1)-3} e^{-x} \right) = -\frac{1}{5} \frac{1}{D+1} e^{-x} \\ &= -\frac{1}{5} e^{-x} \int e^x \cdot e^{-x} dx = \boxed{-\frac{1}{5} x e^{-x}}. \end{aligned}$$

③ 以上より, 一般解は  $\boxed{y = -\frac{1}{5} x e^{-x} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{3x}{2}}}$  ( $C_1, C_2$  は任意定数).

(3) 考える微分方程式は  $(D^3 - 1)y = e^x \sin x$ . 斉次方程式の特性多項式は  $F(t) = t^3 - 1 = (t-1)(t^2 + t + 1)$ .

① 特性方程式  $F(t) = (t-1)(t^2 + t + 1) = 0$  の根が  $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  であるから, 斉次方程式の基本解は

$$\boxed{e^x, e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}, e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}}. \quad \text{【注】基本解を } e^x, e^{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}x}, e^{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}x} \text{ と表すことも可能だが, 特}$$

段の理由がない限り, 実数値関数で答える方が望ましい.

② まず, Euler の公式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  を用いて,  $e^x \sin x = \text{Im}(e^x e^{ix}) = \text{Im}(e^{(1+i)x})$  ( $\text{Im}(\cdot)$  は虚部を表す). この事実に注意して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^3 - 1} e^{(1+i)x} &= \frac{1}{(1+i)^3 - 1} e^{(1+i)x} = -\frac{1}{3-2i} e^{(1+i)x} = -\frac{3+2i}{13} \cdot e^x (\cos x + i \sin x) \\ &= -\frac{1}{13} e^x \{ (3 \cos x - 2 \sin x) + i(2 \cos x + 3 \sin x) \}. \end{aligned}$$

よって, 特殊解は  $\frac{1}{D^3 - 1} e^x \sin x = \text{Im} \left( \frac{1}{D^3 - 1} e^{(1+i)x} \right) = \boxed{-\frac{1}{13} e^x (2 \cos x + 3 \sin x)}$ . あるいは

特殊解を  $y = A e^x \cos x + B e^x \sin x$  ( $A, B$  は定数) の形で探す方法もある (下のコメント参照).  $(D^3 - 1)(A e^x \cos x + B e^x \sin x) = -(3A - 2B) e^x \cos x - (2A + 3B) e^x \sin x$  であるから,  $-(3A - 2B) e^x \cos x - (2A + 3B) e^x \sin x = e^x \sin x$  が恒等式となるように  $A = -\frac{2}{13}, B = -\frac{3}{13}$  と定めればよい.

③ 以上より, 一般解は  $\boxed{y = -\frac{1}{13} e^x (2 \cos x + 3 \sin x) + C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}}$   
( $C_1, C_2, C_3$  は任意定数).

【②に関するコメント】 一般に, 実係数の多項式  $F(t)$  が  $a, b \in \mathbb{R}$  に対して  $F(a+ib) \neq 0$  を満たすならば,  $F(D)y = e^{ax} \cos bx$  (or  $e^{ax} \sin bx$ ) の特殊解は,  $y = e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx)$  ( $A, B$  は定数) の形で見つけ

られる (上では  $a = b = 1$  の場合を考えた).

4

(9 + 6 + 5 = 20 点)

(1) ① に対応する齊次方程式の特性多項式は  $F(\tau) = \tau^2 + a$ .

- $a > 0$  のとき,  $F(\tau) = 0$  の根は  $\pm\sqrt{a}i$  であるから, 齊次方程式の基本解は  $\cos(\sqrt{a}t), \sin(\sqrt{a}t)$ .
- $a = 0$  のとき,  $F(\tau) = 0$  の根は  $0$  (2 重根) であるから, 齊次方程式の基本解は  $1, t$ .
- $a < 0$  のとき,  $F(\tau) = 0$  の根は  $\pm\sqrt{-a}$  であるから, 齊次方程式の基本解は  $e^{\sqrt{-a}t}, e^{-\sqrt{-a}t}$ . あるいは  $\cosh(\sqrt{-a}t), \sinh(\sqrt{-a}t)$ .

(2)  $\frac{1}{D^2 + a} \cos t = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{D^2 + a} e^{it} \right)$  を計算する. 但し, ここでは  $D = \frac{d}{dt}$  であることに注意.

- $a \neq 1$  のとき,  $\frac{1}{D^2 + a} e^{it} = \frac{1}{i^2 + a} e^{it} = \frac{1}{a - 1} e^{it}$  より,  $\frac{1}{D^2 + a} \cos t = \frac{1}{a - 1} \cos t$ .
- $a = 1$  のとき,  $\frac{1}{D^2 + 1} e^{it} = \frac{1}{D - i} \left( \frac{1}{D + i} e^{it} \right) = \frac{1}{D - i} \left( \frac{1}{i + i} e^{it} \right) = \frac{1}{2i} e^{it} \int e^{-it} \cdot e^{it} dt = -\frac{i}{2} t e^{it}$   
より,  $\frac{1}{D^2 + 1} \cos t = \operatorname{Re} \left( -\frac{i}{2} t (\cos t + i \sin t) \right) = \frac{1}{2} t \sin t$ .

(3) (1), (2) より, ① の一般解は

- $a > 0$  かつ  $a \neq 1$  のとき,  $u = \frac{1}{a - 1} \cos t + C_1 \cos(\sqrt{a}t) + C_2 \sin(\sqrt{a}t)$  ( $C_1, C_2$  は任意定数).
- $a = 1$  のとき,  $u = \frac{1}{2} t \sin t + C_1 \cos t + C_2 \sin t$  ( $C_1, C_2$  は任意定数).
- $a = 0$  のとき,  $u = -\cos t + C_1 + C_2 t$  ( $C_1, C_2$  は任意定数).
- $a < 0$  のとき,  $u = \frac{1}{a - 1} \cos t + C_1 e^{\sqrt{-a}t} + C_2 e^{-\sqrt{-a}t}$  あるいは  
 $u = \frac{1}{a - 1} \cos t + C_1 \cosh(\sqrt{-a}t) + C_2 \sinh(\sqrt{-a}t)$  ( $C_1, C_2$  は任意定数).

5

(6 × 2 = 12 点)

(1)  $0 \leq t \leq t_1$  においては  $|v| = v$  より,  $v' = -(1 + v^2)$ . これより  $\int \frac{dv}{1 + v^2} = -\int dt + C$  となり,  $\operatorname{Tan}^{-1} v = -t + C$ . ここで  $v(0) = 1$  を用いて,  $C = \operatorname{Tan}^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ . 従って,  $\operatorname{Tan}^{-1} v = \frac{\pi}{4} - t$ , すなわち  $v = \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$  ( $0 \leq t \leq t_1$ ). 更に,  $v(t_1) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - t_1\right) = 0$  より,  $t_1 = \frac{\pi}{4}$ .

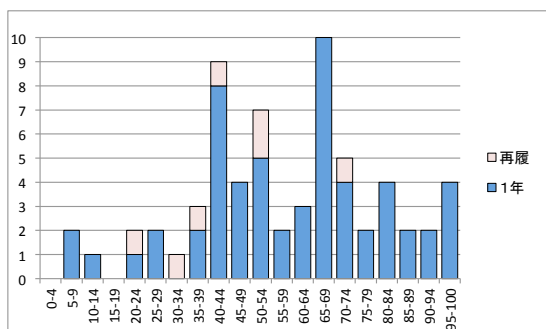
(2)  $t \geq t_1 = \frac{\pi}{4}$  においては  $|v| = -v$  より,  $v' = v^2 - 1$ . これより,  $\int \frac{dv}{v^2 - 1} = \int dt + C$ . ここで,  $\int \frac{dv}{v^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{v - 1} - \frac{1}{v + 1} \right) dv = \frac{1}{2} \log \left| \frac{v - 1}{v + 1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{1 - v}{1 + v}$  ( $v(t_1) = 0$  に注意して絶対値を外した) であるから,  $\log \frac{1 - v}{1 + v} = 2(t + C)$ .  $v(t_1) = 0$  より  $t_1 + C = 0$ , すなわち  $C = -t_1$ . よって,  $\frac{1 - v}{1 + v} = e^{2(t - t_1)}$  となり,  $v$  について解いて  $v = \frac{1 - e^{2(t - t_1)}}{1 + e^{2(t - t_1)}} = -\frac{e^{2(t - t_1)} - 1}{e^{2(t - t_1)} + 1} = -\tanh(t - t_1)$ . すなわち  $v = -\tanh\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$  ( $t \geq t_1 = \frac{\pi}{4}$ ). 勿論,  $v = -\frac{e^{-\frac{\pi}{2}} e^{2t} - 1}{e^{-\frac{\pi}{2}} e^{2t} + 1} = -\frac{e^{2t} - e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{2t} + e^{\frac{\pi}{2}}}$  などと書いてもよい.

【別法】 次のように考えることもできる.

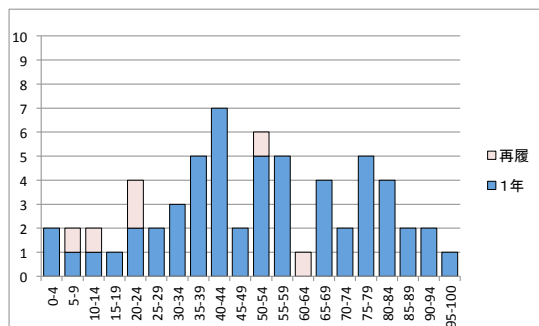
(1)  $0 \leq t \leq t_1$  においては  $|v| = v$  より,  $v' = -(1 + v^2)$ ,  $v(0) = 1$  が成り立つ. よって,  $v' = -(1 + v^2)$  を  $t = 0$  から  $t (\leq t_1)$  まで積分し,  $\int_1^v \frac{dv}{1 + v^2} = -\int_0^t dt$ , すなわち  $\operatorname{Tan}^{-1} v - \operatorname{Tan}^{-1} 1 = -t$ . 従って,

$$v = \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \quad (0 \leq t \leq t_1). \text{ 更に, } v(t_1) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - t_1\right) = 0 \text{ より, } t_1 = \frac{\pi}{4}.$$

(2)  $t \geq t_1 = \frac{\pi}{4}$  においては  $|v| = -v$  より,  $v' = v^2 - 1$ ,  $v(t_1) = 0$  が成り立つ. よって,  $v' = v^2 - 1$  を  $t = t_1$  から  $t (\geq t_1)$  まで積分し,  $\int_0^v \frac{dv}{v^2 - 1} = \int_{t_1}^t dt$ . ここで,  $\int_0^v \frac{dv}{v^2 - 1} = \frac{1}{2} \int_0^v \left( \frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1} \right) dv = \frac{1}{2} \log \left| \frac{v-1}{v+1} \right| = \frac{1}{2} \log \frac{1-v}{1+v}$ ,  $\int_{t_1}^t dt = t - t_1 (= t_2 \text{ とおく})$  であるから,  $\frac{1-v}{1+v} = e^{2t_2}$  を得る. これより,  $v = \frac{1 - e^{2t_2}}{1 + e^{2t_2}} = -\frac{e^{2t_2} - 1}{e^{2t_2} + 1} = -\tanh t_2$ , すなわち  $v = -\tanh\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(t \geq t_1 = \frac{\pi}{4}\right).$



| C12 | 人数 | 平均点  | 標準偏差 | 最高点 |
|-----|----|------|------|-----|
| 1年  | 58 | 59.4 | 22.4 | 100 |
| 再履  | 7  | 43.7 | 15.2 | 71  |



| C8 | 人数 | 平均点  | 標準偏差 | 最高点 |
|----|----|------|------|-----|
| 1年 | 56 | 52.4 | 23.9 | 100 |
| 再履 | 6  | 28.8 | 20.0 | 60  |