解析学 【中間試験】 2017. 12. 15 (Fri)

— 答だけでなくその根拠も書いて下さい, 解答する順序は問いません —

1 次の正項級数の収束, 発散を調べよ. 但し, a は正の定数とする.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

2 次の整級数の収束半径および収束区間を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n\sqrt{n}}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n} x^n$　　(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-n}{n^2+2} x^{2n}$

3 次の関数の $x=0$ における整級数展開 (Maclaurin 展開) を求めよ. また, その整級数展開の収束半径を求めよ.

(1) $\log(2+x)$　　(2) $\mathrm{Tan}^{-1}x$ (項別積分を利用)　　(3) $\varphi(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & (x \geqslant 0) \\ \cosh\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$

4 次の関数の $x=0$ における整級数の 0 でない最初の 3 項を求めよ. (例えば, $\dfrac{1}{1-x^2}$ なら $1+x^2+x^4$ と答える.)

(1) $e^{-x}\sin x$　　(2) $\log(x+\sqrt{1+x^2}\,)$　　(3) $\dfrac{x}{\log(1+x)}$

5 次の問いに答えよ.

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数列 $\left\{\dfrac{1}{1+x^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数を求め, 一様収束するかどうかを調べよ.

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n}\,x)}{n^2}$ が $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ. 更に, 級数の表す関数を $f(x)$ と書くとき,

① $f(x)$ の不定積分 (の 1 つ) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を関数項級数の形で表せ.

② $f(x)$ が C^1 級であることを示し, 導関数 $f'(x)$ を関数項級数の形で表せ.

6 次の問いに答えよ. (深入りしなくてよい)

(1) 級数の絶対収束の定義を述べ, 絶対収束に関する重要な性質を挙げよ.

(2) 整級数の収束半径の定義を述べ, 収束半径に関する重要な性質を挙げよ.

1 年クラス 12 & 8（担当：伊東）

解析学 【中間試験】 《解答例》 2017. 12. 15 (Fri) 実施

1 (6 点 × 3 = 18 点)

正項級数 $\sum a_n$ の収束判定の問題. 判定には次の方法が基本的である.

⓪ 級数 $\sum a_n$ が収束するならば必ず $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる (正項級数に限らない事実). 従って, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でない (すなわち, $\{a_n\}$ の極限が存在しない, または 0 以外の極限をもつ) ならば, $\sum a_n$ は発散する.

① $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ または $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ が存在するとき (後ろの極限が存在すれば前も存在し一致する),

$$\rho < 1 \text{ ならば } \sum a_n \text{ は収束し, } \rho > 1 \text{ ならば } \sum a_n \text{ は発散する.}$$

前の "n 乗根の極限" を用いる方法を **Cauchy(コーシー)の判定法** (**root test**), 後の "比の極限" を用いる方法を **D'Alembert(ダランベール)の判定法** (**ratio test**) と呼ぶ. 証明は公比 ρ の等比級数と比較することによってなされる.

② $f(x)$ が $x \geqslant 1$ で正値かつ単調減少のとき,

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束 (発散)} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty \ (= \infty).$$

この方法は **積分判定法** (**integral test**) と呼ばれる. ①で $\rho = 1$ となる場合の収束判定に有効なことが多い. 証明は不等式 $\int_1^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{N} f(x)\,dx$ の極限形 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ を見れば明らか.

(1) $\dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$ は $n \geqslant 1$ について単調減少で, $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \Big[\frac{1}{2}\log(x^2+1)\Big]_1^{\infty} = \infty$. よって, 積分判定法により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ は $\boxed{\text{発散}}$ する. 【別法】 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty.$

(2) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおけば, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{n+1}{2(2n+1)} \to \dfrac{1}{4}\ (n \to \infty)$. このとき, $\dfrac{1}{4} < 1$ であるから, D'Alembert の判定法により, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ は $\boxed{\text{収束}}$ する.

(3) $a_n = a^n\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^{n^2}$ とおけば, $\sqrt[n]{a_n} = a\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^n = \dfrac{a}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \dfrac{a}{e}\ (n \to \infty)$. よって, Cauchy の判定法により, 与えられた級数は $0 < a < e$ のとき収束し, $a > e$ のとき発散する. 一方, $a = e$ のときは, $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \geqslant 1$ (これは「数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ は n について単調増加で e に収束する」というよく知られた事実による) であるから $a_n \geqslant 1$. あるいは, $n \to \infty$ のとき,

$$\log a_n = n + n^2 \log\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = n - n^2 \log\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = n - n^2\Big\{\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big\} = \frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}$$

であるから, $a_n \to \sqrt{e} > 0$. よって, $a = e$ のときの級数は発散する (上記の⓪参照). 以上をまとめて, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}$ は $\boxed{0 < a < e \text{ のとき収束}}$ し, $\boxed{a \geqslant e \text{ のとき発散}}$ する.

2 (8 点 × 3 = 24 点) $\cdots$ 収束半径が 4 点, 収束区間については端点での収束の吟味がないものは採点せず.

整級数の**収束半径**と**収束区間**を求める問題. 整級数 $\sum a_n x^n$ に対して,

$$|x| < r \text{ ならば (絶対) 収束し, } |x| > r \text{ ならば発散する}$$

を満たす $r \in [0,\infty) \cup \{\infty\}$ が存在する. この r を収束半径と呼ぶ. この量は $r = \sup\big\{|x| \bigm| \sum a_n x^n \text{ が収束する}\big\}$ で与えられる (x の動く範囲が $\mathbb{R}$ であっても $\mathbb{C}$ であっても r の値は変わらない). 特に, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ または $\lim_{n\to\infty} \Big|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big| = \rho$ が存在するとき, $r = \dfrac{1}{\rho}$ が成り立つ. (この事実は正項級数 $\sum |a_n x^n| = \sum |a_n||x|^n$ が収束するための条件を考えることにより容易に示される.) 一方, 集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ が収束する}\}$ をこの整級数の**収束区間**と呼ぶが, 収束区間を決定する際に問題となるのは "端点" $x = \pm r$ が含まれるかどうかだけである ($|x| < r$ なら x は収束区間に属し, $|x| > r$ なら属さないことは収束半径の定義より明らか). 端点での収束

判定には, 積分判定法や**交項級数** (正負の項が交互に現れる級数) の収束条件が用いられる. 一般に, 交項級数 $\sum b_n$ は, 条件 $|b_n| \searrow 0$ (すなわち数列 $\{|b_n|\}$ が単調減少かつ 0 に収束) の下で, 収束する.

(1) $a_n = \dfrac{1}{3^n\sqrt{n}}$ とおけば, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{3^n\sqrt{n}}{3^{n+1}\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \to \dfrac{1}{3}$ であるから, 収束半径は $r = \dfrac{1}{1/3} = \boxed{3}$. 次に, 端点 $x = \pm 3$ において, 級数は $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm 3)^n}{3^n\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm 1)^n}{\sqrt{n}}$ となる. $x = 3$ では $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ となるが, $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^{\infty} = \infty$ であるから, 積分判定法により発散する. 一方, $x = -3$ では交項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ となるが, $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ が n について単調減少で 0 に収束するので, この交項級数は確かに収束する. よって, 求める収束区間は $\boxed{-3 \leqslant x < 3}$.

(2) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n\log n}$ とおけば,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)} = \frac{n}{n+1}\,\frac{\log n}{\log n + \log\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\frac{n+1}{n}}{\log n}\right)} \to 1 \ \ (n\to\infty)$$

より, 収束半径は $r = \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$. 次に, 端点での級数の収束発散を調べる. $x = -1$ で級数は $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\log n}$ となるが, $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log x} = \int_{\log 2}^{\infty}\frac{dt}{t} = \Big[\,\log t\,\Big]_{\log 2}^{\infty} = \infty$ ($t = \log x$ で置換) であるから, 積分判定法により発散する. また, $x = 1$ では級数は交項級数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\log n}$ となり, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n\log n}\right| = \dfrac{1}{n\log n}$ が (n について) 単調減少で 0 に収束するので, この交項級数は収束する. よって, 収束区間は $\boxed{-1 < x \leqslant 1}$.

(3) まず, $y = x^2$, $b_n = \dfrac{2^n - n}{n^2+2}\,(>0)$ とおいて, 変数 y に関する整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ の収束半径 r' を求める. $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{2^{n+1}-n-1}{(n+1)^2+2}\,\dfrac{n^2+2}{2^n-n} = \dfrac{2-\frac{n+1}{2^n}}{1-\frac{n}{2^n}}\,\dfrac{1+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} \to 2$ $(n\to\infty)$ であるから, $r' = \dfrac{1}{2}$. よって, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x^2)^n$ の収束半径は $r = \sqrt{r'} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$. 次に, 端点 $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ での級数は正項級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{2^n}$ であり, $\dfrac{b_n}{2^n} = \dfrac{1-n2^{-n}}{n^2+2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ $(n \geqslant 1)$ かつ $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = 1 < \infty$ であるから, 積分判定法により $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{2^n}$ は収束する. よって, 収束区間は $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

3

(6 点 × 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開を求める問題. $\dfrac{1}{1+x}$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ といった重要な関数の整級数展開は常識とすべきである. また, 整級数に対して**項別微分**, **項別積分**が許されるという事実もよく利用される.

(1) $\log(2+x) = \log 2 + \log\!\left(1+\dfrac{x}{2}\right)$ において, $\log(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$ を適用し,

$$\log(2+x) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \boxed{\log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\,2^n}x^n} \ \ (-2 < x \leqslant 2),\ \ \text{収束半径は}\ \boxed{2}.$$

(2) $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ $(-1 < x < 1)$ を項別積分して,

$$\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}} \ \ (-1 \leqslant x \leqslant 1),\ \ \text{収束半径は}\ \boxed{1}.$$

ここで, 収束半径が 1 であることは項別積分で収束半径が変わらないことから明らかであるが, もっと強く, 収束区間が $-1 \leqslant x \leqslant 1$ であることを主張した. これは, 端点 $x = \pm 1$ における級数 $\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ が収束することによる (交項級数であって $\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \frac{1}{2n+1} \searrow 0$).

(3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty)$ であるから,

$$\cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x}\,)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n \quad (0 \leqslant x < \infty),$$

$$\cosh\sqrt{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(\sqrt{-x}\,)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n \quad (-\infty < x \leqslant 0).$$

これより,

$$\varphi(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n} \ (-\infty < x < \infty), \quad \text{収束半径は } \boxed{\infty}.$$

$\cosh x$ の整級数展開は既知としてよいが, 念のため示しておく. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$ を用いて,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

最後の等号は, $\frac{1+(-1)^n}{2}$ が n が奇数なら 0, n が偶数 $(n = 2m)$ なら 1 であることによる. なお, 同様にして $\sinh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ $(-\infty < x < \infty)$ が得られる.

4

(6 点 × 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開の最初の何項かを求める問題. よく知られた整級数展開を用いて計算する. 勿論,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 + \cdots$$

を用いてもよいが, 計算が複雑になってしまう場合があるので注意を要する.

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ を用いて,

$$e^{-x}\sin x = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) \qquad (x^3 \text{ の項まで展開})$$

$$= x - x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \cdots = \boxed{x - x^2 + \frac{1}{3}x^3} + \cdots.$$

【別法】$\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$ $(z = x + iy \in \mathbb{C}$ に対して $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y)$ であるから,

$$e^{-x}\sin x = e^{-x}\operatorname{Im} e^{ix} = \operatorname{Im}(e^{-x}e^{ix}) = \operatorname{Im} e^{(-1+i)x}.$$

ここで,

$$e^{(-1+i)x} = 1 + (-1+i)x + \frac{1}{2}\{(-1+i)x\}^2 + \frac{1}{6}\{(-1+i)x\}^3 + \cdots$$
$$= 1 + (-1+i)x + (-i)x^2 + \frac{1+i}{3}x^3 + \cdots$$

であるから, 両辺の虚部 (実部) をとり,

$$e^{-x}\sin x = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots. \quad \left(e^{-x}\cos x = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots.\right)$$

(2) まず, $\log(x + \sqrt{1+x^2}\,) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ に注意する. また, $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$ より,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots.$$

よって,

$$\log(x + \sqrt{1+x^2}\,) = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{8}t^4 + \cdots\right) dt = \boxed{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5} + \cdots.$$

(3) $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\ (-1<x\leqslant 1)$, $\frac{1}{1-X}=\sum_{n=0}^{\infty}X^n\ (-1<X<1)$ を用いて,

$$\frac{x}{\log(1+x)}=\frac{x}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots}=\frac{1}{1-(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}+\cdots)}$$
$$=1+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{3}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots=\boxed{1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2}+\cdots.$$

5

(6 点 + 8 点 = 14 点)

関数列 $\{f_n\}$ が区間 I 上で**各点収束**するとは, 各 $x\in I$ に対して, $f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ が存在することをいう. ここで定まる I 上の関数 f を $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**極限関数**と呼ぶ. 関数列 $\{f_n\}$ が I 上で**一様収束**するとは, 極限関数 f が存在し,

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\to 0\quad(n\to\infty)$$

となることをいう (講義では左辺を $\|f_n-f\|$ と書いた). $\{f_n\}$ が I 上で一様収束するとき, 次が成り立つ:

- 各 f_n が I 上で連続ならば, 極限関数 f も I 上で連続となる.
- 各 f_n が I 上で C^1 級で $\{f_n'\}$ が一様収束するならば ($\{f_n\}$ については各点収束だけで十分), f も I 上で C^1 級で, 極限と微分の順序交換が可能 : $f'(x)=\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$.
- I が閉区間で, 各 f_n が I 上で連続ならば, 極限と積分の順序交換可能 : $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx=\int_I f(x)\,dx$.

関数項級数 $\sum f_n$ に対して, 部分和関数列 $\{F_N\}$ (F_N は $F_N(x)=\sum_{n\leqslant N}f_n(x)$ で定める) が I 上で一様収束するとき, $\sum f_n$ は I 上で一様収束するという. このとき ($\{F_N\}$ の) 極限関数を $\sum f_n$ 自身で表す. 関数項級数の一様収束については **Weierstrass(ワイエルシュトラス) の判定法** (M-test) が大変有用である:

$$|f_n(x)|\leqslant M_n\ (\forall x\in I)\ \text{かつ}\ \sum M_n<\infty\ \text{ならば},\ \sum f_n\ \text{は}\ I\ \text{上で一様収束する}.$$

また, $\sum f_n$ が I 上で一様収束するとき, (一様収束する関数列の性質に対応して) 次が成り立つ.

- 各 f_n が I 上で連続ならば, $\sum f_n$ も I 上で連続となる.
- 各 f_n が I 上で C^1 級で $\sum f_n'$ が一様収束するならば, $\sum f_n$ も I 上で C^1 級で, 項別微分可能: $\left\{\sum f_n(x)\right\}'=\sum f_n'(x)$.
- I が閉区間で, 各 f_n が I 上で連続ならば, 項別積分可能: $\int_I\sum f_n(x)\,dx=\sum\int_I f_n(x)\,dx$.

(1) $g_n(x)=\frac{1}{1+x^{2n}}$ $(x\in\mathbb{R})$ とおく. $n\to\infty$ のとき, $|x|<1$ ならば $x^{2n}\to 0$, $|x|=1$ ならば $x^{2n}=1$, $|x|>1$ ならば $x^{2n}\to\infty$. よって, 関数列 $\{g_n(x)\}$ の極限関数は

$$g(x)=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ 1/2 & (|x|=1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

で与えられる. 次に, 各 $g_n(x)$ は連続関数であるから, 関数列 $\{g_n(x)\}$ が一様収束すると仮定すれば極限関数 $g(x)$ も連続関数でなければならない. ところが, $g(x)$ は明らかに $x=\pm1$ で不連続であるから, この収束は $\boxed{\text{一様収束でない}}$.

(2) まず,

$$\left|\frac{\sin(\sqrt{n}\,x)}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(x\in\mathbb{R}),\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=2<\infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{n}\,x)}{n^2}$ $(=f(x))$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束し, 連続関数を定める (連続関数の一様収束極限は連続関数となる!).

① この関数項級数が $\mathbb{R}$ 上で一様収束するから, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{n}\,x)}{n^2}$ に対して項別積分が許され,

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[-\frac{\cos(\sqrt{n}\,t)}{\sqrt{n}}\right]_{t=0}^{t=x}=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(\sqrt{n}\,x)}{n^2\sqrt{n}}}\quad(x\in\mathbb{R}).$$

② 項別微分して得られる関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\sqrt{n}\,x)}{n\sqrt{n}}$ についても,

$$\left|\frac{\cos(\sqrt{n}\,x)}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad (x\in\mathbb{R}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} \leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}} = 3 < \infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, $\mathbb{R}$ 上で一様収束して連続関数を定める. 従って, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であって, その導関数は

$$f'(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\sqrt{n}\,x\right)}{n\sqrt{n}}}.$$

【注】① では $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ を示すために, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=2<\infty$ と具体的な不等式を用いたが, 積分判定法によれば $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}<\infty$ を示すだけで十分. ② についても同様である. (解答例の $\boxed{1}$ ② に書かれている積分判定法の説明を見よ.)

$\boxed{6}$ (6 点 + 6 点 = 12 点)

定義はきちんと覚えてほしい. 性質については下に述べるほど詳しくなくてもよい.

(1) 級数 $\sum a_n$ に対して, $\sum|a_n|$ が収束するとき, $\sum a_n$ は **絶対収束** するという. $\sum a_n$ が絶対収束するとき, 級数 $\sum a_n$ も収束し, $\{a_n\}$ を勝手に並べ替えて作った数列 $\{\tilde{a}_n\}$ に対する級数 $\sum \tilde{a}_n$ も絶対収束し, しかも最初の級数と同じ和をもつ.

(2) 整級数 $\sum a_n x^n$ に対して, 条件

$$\textstyle\sum a_n x^n \text{ は } |x|<r \text{ のとき (絶対) 収束し, } |x|>r \text{ のとき発散する}$$

を満たす r $(0\leqslant r\leqslant\infty)$ を**収束半径**と呼ぶ ($r=0$ のときはすべての $x\neq 0$ に対して $\sum a_n x^n$ が発散, $r=\infty$ のときはすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $\sum a_n x^n$ が収束, と解釈する). 収束半径 r は (結果的に)

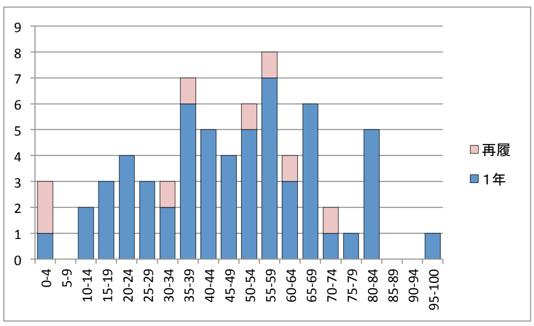
$$r = \sup\left\{|x| \;\middle|\; \textstyle\sum a_n x^n \text{ が収束する}\right\} \quad (x \text{ の動く範囲を } \mathbb{R},\mathbb{C} \text{ のどちらで考えても同じ})$$

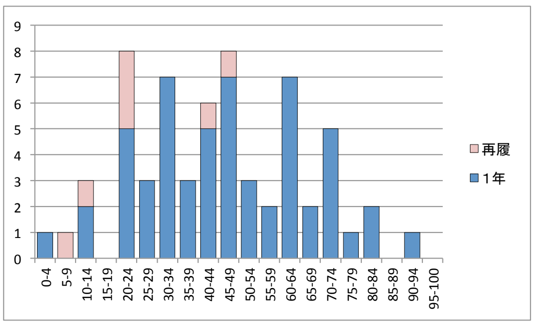
で与えられるが, これを定義と考えてもよい. 収束半径 r は例えば次のような重要な性質をもつ:

$0<r\leqslant\infty$ のとき, $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x|<r$ において C^∞ 級関数を定め (ここまでは書いて欲しい), この範囲で項別微分, 項別積分が許される. すなわち,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n, \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n.$$

更に, 項別微分, 項別積分して得られる整級数の収束半径も r となる.





C12	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	59	48.0	21.0	95
再履	8	40.0	24.6	73

C8	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	56	46.9	19.8	94
再履	7	25.0	12.9	47