

1 次の微分方程式を解け.

$$(1) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

$$(3) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \log x \quad (x > 0)$$

$$(4) \frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}y^2$$

2 1 階微分方程式 $(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ について次の問いに答えよ.

(1) $2xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$ と変形するとき, これが完全微分形であることを示し, それに即した解法で一般解を求めよ.

(2) 同次形の方程式に変形できることを示し, それに即した解法で一般解を求めよ.

3 次の $y = y(x)$ を未知関数とする定数係数線形微分方程式を解け. (① 対応する斉次方程式の基本解, ② 与えられた方程式の特殊解, ③ 与えられた方程式の一般解, の順に求めよ.)

$$(1) 2y'' + y' - y = x^2$$

$$(2) y'' + y = e^{-x} \cos x$$

$$(3) y''' + y = e^{-x}$$

4 次の $x = x(t)$ を未知関数とする微分方程式の初期値問題を解け. (まず, $y = y(t) := x'(t)$ を未知関数とする微分方程式の初期値問題を解くとよい.)

$$(1) x'' = 1 + (x')^2, \quad x'(0) = x(0) = 0$$

$$(2) x'' = 1 - (x')^2, \quad x'(0) = x(0) = 0$$

5 $u = u(t)$ を未知関数とする微分方程式

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = \sin \omega t \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

について考える. ここで, ω は正定数であるとする.

(1) $u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$ の一般解を求めよ.

(2) $u(t) = At \cos \omega t$ (A は定数) の形の ① の特殊解を求めよ.

(3) ① を初期条件 $u(0) = u'(0) = 0$ のもとで解け.

1

(7 × 4 = 28 点)

1 階微分方程式のうち, 変数分離形, 1 階線形微分方程式, Bernoulli の微分方程式の問題である. 解法を大雑把に復習すると,

- 変数分離形: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. 一般解は $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$ (C は任意定数) で与えられる (C は不定積分に取り込まれていると考えて書かないことも多い). また, $g(\alpha) = 0$ を満たす定数 α が存在すれば, 定数関数 $y = \alpha$ も解となる (この解は特異解となる場合がある).
- 1 階線形微分方程式: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. $p(x)$ の不定積分 (の 1 つ) を $P(x) = \int p(x) dx$ (積分定数は勝手に選んでよい) とおけば, 一般解は $y = e^{-P(x)} \left(\int e^{P(x)} q(x) dx + C \right)$ (C は任意定数) で与えられる (C は不定積分に取り込まれていると考えてもよい). なお, 1 階線形微分方程式には特異解は現れない.
- Bernoulli の微分方程式: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^m$ ($m \in \mathbb{Z}, m \neq 0, 1$). $z = y^{1-m}$ とおくことにより, z の 1 階線形微分方程式となる ($m = 0, 1$ なら既にそうになっている).

- (1) $\frac{dy}{dx} = 2xy$ は変数分離形 (1 階線形微分方程式でもある). $y \neq 0$ のとき, $\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$ より, $\log|y| = x^2 + C$ (C は任意定数). よって, $y = C_1 e^{x^2}$ ($C_1 := \pm e^C \neq 0$). 一方, $y = 0$ (定数関数) は明らかに解. 以上をまとめて, 求める解は $y = C_1 e^{x^2}$ (C_1 は任意定数).

- (2) $\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 = (1 - y)(1 + y)$ は変数分離形. $y \neq \pm 1$ のとき, $\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int dx + C$. ここで, $\int \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 - y} + \frac{1}{1 + y} \right) dy = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right|$ であるから, $\frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + y}{1 - y} \right| = x + C$ (C は任意定数). よって, $\frac{1 + y}{1 - y} = C_1 e^{2x}$ ($C_1 := \pm e^{2C} \neq 0$) となり, これを y について解いて $y = \frac{C_1 e^{2x} - 1}{C_1 e^{2x} + 1}$. 一方,

$$y = \pm 1 \text{ (ともに定数関数) は明らかに解. 以上をまとめて, 求める解は } y = \frac{C_1 e^{2x} - 1}{C_1 e^{2x} + 1} \text{ (} C_1 \text{ は任意定数)}$$

および $y = 1$ ($C_1 = \infty$ に対応). 【注】 $y = \frac{e^{2x} - C_2}{e^{2x} + C_2}$ (C_2 は任意定数) および $y = -1$ ($C_2 = \infty$ に対応) と表してもよい.

- (3) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \log x$ ($x > 0$) は 1 階線形微分方程式. $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = \log x$ とおいて, $P(x) = \int p(x) dx = -\log x$, $e^{-P(x)} = x$, $\int e^{P(x)} q(x) dx = \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} (\log x)^2$. よって, 求める解は $y = \frac{1}{2} x (\log x)^2 + Cx$ (C は任意定数).

【別法】 $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \log x$ ($x > 0$) の両辺に $\frac{1}{x}$ を掛ければ, $\frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x^2} = \frac{\log x}{x}$. これより, $\frac{y}{x} = \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$ が導かれ, $y = \frac{1}{2} x (\log x)^2 + Cx$ (C は任意定数) を得る.

- (4) $y' + 2y = e^{-x} y^2$ は Bernoulli の微分方程式 ($m = 2$). $y \neq 0$ のとき, $z = y^{-1}$ とおけば, $z' = -y^{-2} y' = -y^{-2} (-2y + e^{-x} y^2) = 2z - e^{-x}$ より, $z' - 2z = -e^{-x}$ (1 階線形微分方程式). ここで, $p(x) = -2$, $q(x) = -e^{-x}$ とおいて, $P(x) = \int p(x) dx = -2x$, $e^{-P(x)} = e^{2x}$, $\int e^{P(x)} q(x) dx = \int e^{-2x} (-e^{-x}) dx = \frac{1}{3} e^{-3x} + C$. これより, $z = e^{2x} \left(\frac{1}{3} e^{-3x} + C \right) = \frac{1}{3} e^{-x} + C e^{2x}$. 更に, $y = z^{-1}$ より, $y = \frac{1}{\frac{1}{3} e^{-x} + C e^{2x}}$,

すなわち $y = \frac{3e^x}{C_1 e^{3x} + 1}$ (C_1 は任意定数). 一方, $y = 0$ (定数関数) も解となる ($C_1 = \infty$ に対応).

2

(7 × 2 = 14 点)

1 階微分方程式のうち, 同次形, 完全微分形の問題である. 解法を大雑把に復習すると,

- 同次形: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$. $z = \frac{y}{x}$ とおけば, $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$ であるから, 与えられた微分方程式は $z + x \frac{dz}{dx} = f(z)$, すなわち $\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$ と変形できる. これは変数分離形である (解法は既出).
- 完全微分形: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. 長方形領域 D で $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ が成り立つならば, $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ を満たす $F(x, y)$ が存在し, 解が $F(x, y) = C$ (C は任意定数) で与えられる. このような F は点 $(a, b) \in D$ を任意に固定し,

$$F(x, y) = \int_a^x P(\xi, b) d\xi + \int_b^y Q(x, \eta) d\eta \left(= \int_b^y Q(a, \eta) d\eta + \int_a^x P(\xi, y) d\xi \right)$$

で与えられる.

- (1) $P(x, y) = 2xy$, $Q(x, y) = x^2 + y^2$ とおけば, 与えられた微分方程式は $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ と書ける. このとき $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ であるから, これは完全微分形. ここで,

$$F(x, y) := \int_0^x P(\xi, 0) d\xi + \int_0^y Q(x, \eta) d\eta = \int_0^x 0 d\xi + \int_0^y (x^2 + \eta^2) d\eta = x^2 y + \frac{1}{3} y^3$$

とおけば, 求める解は $F(x, y) = C$, すなわち $\boxed{3x^2 y + y^3 = C_1}$ ($C_1 = 3C$ は任意定数).

- (2) $(x^2 + y^2) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$ の両辺を x^2 で割って, $\left\{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right\} \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 0$. よって, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2 \cdot \frac{y}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ となり, これは同次形. $z = \frac{y}{x}$ とおけば, $y = xz$, $\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$ であるから,

$$z + x \frac{dz}{dx} = -\frac{2z}{1 + z^2}. \quad \therefore x \frac{dz}{dx} \left(= -\frac{2z}{1 + z^2} - z \right) = -\frac{z(z^2 + 3)}{z^2 + 1} \text{ (変数分離形).}$$

$z = 0$ (定数関数) は明らかに解. $z \neq 0$ のときは $\int \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 3)} dz = -\int \frac{dx}{x}$. この左辺を計算するために, 被積分関数を部分分数分解する. $\frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 3)} = \frac{a}{z} + \frac{bz + c}{z^2 + 3}$ (a, b, c は定数) において, $z^2 + 1 = a(z^2 + 3) + (bz + c)z$, 整理して $(a + b - 1)z^2 + cz + (3a - 1) = 0$. これが z に関する恒等式になるので, $a + b - 1 = c = 3a - 1 = 0$ より $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 0$. よって, $\frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 + 3} \right) dz = -\int \frac{dx}{x}$ となり,

$$\frac{1}{3} \{ \log|z| + \log(z^2 + 3) \} = -\log|x| + C. \quad \therefore \log(|z|(z^2 + 3)) = \log|x|^{-3} + 3C.$$

これより, $z(z^2 + 3) = C_1 x^{-3}$ ($C_1 := \pm e^{3C} \neq 0$). 初めの $z = 0$ の場合も合わせ, $z(z^2 + 3) = C_1 x^{-3}$ (C_1 は任意定数). 最後に, $z = \frac{y}{x}$ であったから,

$$\frac{y}{x} \left\{ \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 3 \right\} = \frac{C_1}{x^3}. \quad \therefore \boxed{3x^2 y + y^3 = C_1} \quad (C_1 \text{ は任意定数}).$$

【別法】 上の議論では $\int \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 3)} dz$ を計算するために被積分関数を部分分数分解したが,

$$\frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 3)} = \frac{z^2 + 1}{z^3 + 3z} = \frac{1}{3} \frac{(z^3 + 3z)'}{z^3 + 3z}$$

という関係に気付けば積分は簡単: $\int \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 3)} dz = \frac{1}{3} \log|z^3 + 3z|$. あとの議論は上と全く同じである.

3

(12 × 3 = 36 点)

定数係数線形微分方程式を $F(D)y = q(x)$ ($D = \frac{d}{dx}$) の形で表すとき,

$$[F(D)y = q(x) \text{ の一般解}] = [F(D)y = q(x) \text{ の特殊解}] + [F(D)y = 0 \text{ の一般解}]$$

が成り立つ (線形微分方程式には特異解は存在しないことに注意). ここで, $[F(D)y = 0 \text{ の一般解}]$ は特性多項式 $F(t)$ の因数分解 (あるいは特性方程式 $F(t) = 0$ の根) を見ることにより得られる (詳細は教科書あるいは講義ノート参照, すぐ下の例も見よ). また, $[F(D)y = q(x) \text{ の特殊解}]$ は $\frac{1}{F(D)}q(x)$ を計算することにより得られる

が、もっと簡単に計算できる場合もある ((1), (2) の中のコメント参照). $\frac{1}{F(D)}q(x)$ の計算で必ず覚えておくべき公式として次の2つを挙げておく:

$$\bullet \frac{1}{D-a}q(x) = e^{ax} \int e^{-ax}q(x) dx, \quad \bullet F(a) \neq 0 \text{ ならば } \frac{1}{F(D)}e^{ax} = \frac{1}{F(a)}e^{ax}.$$

念のため、最も基本的な $F(t) = at^2 + bt + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ は定数, $a \neq 0$) の場合について、斉次方程式 $F(D)y (= ay'' + by' + cy) = 0$ の基本解 (= 解空間の基底) および一般解について整理しておく (C_1, C_2 は任意定数を表す).

- $F(t) = 0$ が2つの異なる実根 α, β をもつとき, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$. 従って, 一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$.
- $F(t) = 0$ が2つの異なる虚根 $\gamma, \bar{\gamma}$ (共役複素数の組) をもつとき, $\gamma = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$) とおけば, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$. 従って, 一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$.
- $F(t) = 0$ が2重根 $\alpha \in \mathbb{R}$ をもつとき, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}$. 従って, 一般解は $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$.

(1) 与えられた微分方程式は $(2D^2 + D - 1)y = x^2$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = 2t^2 + t - 1$.

① 特性方程式 $F(t) = (2t - 1)(t + 1) = 0$ の根が $-1, \frac{1}{2}$ であるから, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^{-x}, e^{\frac{x}{2}}}$.

② 特殊解 $y = \frac{1}{2D^2 + D - 1} x^2$ は

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1}{1 - (D + 2D^2)} x^2 = -\{1 + (D + 2D^2) + (D + 2D^2)^2\} x^2 \\ &= -(1 + D + 3D^2)x^2 = \boxed{-x^2 - 2x - 6}. \end{aligned}$$

あるいは, 特殊解を $y = Ax^2 + Bx + C$ (A, B, C は定数) の形で探す方法もある (下のコメント参照).

$$\begin{aligned} (2D^2 + D - 1)(Ax^2 + Bx + C) &= 4A + (2Ax + B) - (Ax^2 + Bx + C) \\ &= -Ax^2 + (2A - B)x + (4A + B - C) \end{aligned}$$

であるから, $-Ax^2 + (2A - B)x + (4A + B - C) = x^2$ が恒等式となるように $A = -1, B = -2, C = -6$ と定めればよい.

③ 以上の結果から, 一般解は $\boxed{y = -x^2 - 2x - 6 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}}$ (C_1, C_2 は任意定数).

【②に関するコメント】 一般に, $F(0) \neq 0$ ならば, $F(D)y = x^m$ の特殊解は x の m 次多項式の形で見つめられる (上では $m = 2$ の場合を考えた).

(2) 与えられた微分方程式は $(D^2 + 1)y = e^{-x} \cos x$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = t^2 + 1$.

① 特性方程式 $F(t) = t^2 + 1 = 0$ の根が $\pm i$ であるから, 斉次方程式の基本解は $\boxed{\cos x, \sin x}$. (e^{ix}, e^{-ix} でも誤りではないが, 実関数の形の方が望ましい.)

② まず, Euler の公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いて, $e^{-x} \cos x = \operatorname{Re}(e^{-x} e^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{(-1+i)x})$ ($\operatorname{Re}(\cdot)$ は実部を表す). この事実注意到して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + 1} e^{(-1+i)x} &= \frac{1}{(-1+i)^2 + 1} e^{(-1+i)x} = \frac{1}{1-2i} e^{(-1+i)x} = \frac{1+2i}{5} \cdot e^{-x} (\cos x + i \sin x) \\ &= \frac{1}{5} e^{-x} \{(\cos x - 2 \sin x) + i(2 \cos x + \sin x)\}. \end{aligned}$$

よって, 特殊解は $y = \frac{1}{D^2 + 1} e^{-x} \cos x = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{D^2 + 1} e^{(-1+i)x}\right) = \boxed{\frac{1}{5} e^{-x} (\cos x - 2 \sin x)}$. あるいは特殊解を $y = Ae^{-x} \cos x + Be^{-x} \sin x$ (A, B は定数) の形で探す方法もある (下のコメント参照). $(D^2 + 1)(Ae^{-x} \cos x + Be^{-x} \sin x) = (A - 2B)e^{-x} \cos x + (2A + B)e^{-x} \sin x$ であるから, $(A - 2B)e^{-x} \cos x + (2A + B)e^{-x} \sin x = e^{-x} \cos x$ が恒等式となるように $A = \frac{1}{5}, B = -\frac{2}{5}$ と定めればよい.

③ 以上の結果から、一般解は $y = \frac{1}{5}e^{-x}(\cos x - 2\sin x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (C_1, C_2 は任意定数).

【②に関するコメント】 一般に、実係数の多項式 $F(t)$ が $a, b \in \mathbb{R}$ に対して $F(a+ib) \neq 0$ を満たすならば、 $F(D)y = e^{ax} \cos bx$ (or $e^{ax} \sin bx$) の特殊解は、 $y = e^{ax}(A \cos bx + B \sin bx)$ (A, B は定数) の形で見つかる (上では $a = -1, b = 1$ の場合を考えた).

(3) 与えられた微分方程式は $(D^3 + 1)y = e^{-x}$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = t^3 + 1$.

① 特性方程式 $F(t) = (t+1)(t^2 - t + 1) = 0$ の根は $-1, \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$. よって、斉次方程式の基本解は

$e^{-x}, e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2}, e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2}$. ($e^{-x}, e^{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x}, e^{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x}$ でも誤りではないが、実関数の形の方が望ましい.)

② 特殊解 $y = \frac{1}{D^3 + 1}e^{-x}$ は

$$y = \frac{1}{(D+1)(D^2 - D + 1)}e^{-x} = \frac{1}{D+1} \left(\frac{1}{D^2 - D + 1}e^{-x} \right) = \frac{1}{D+1} \left(\frac{1}{(-1)^2 - (-1) + 1}e^{-x} \right) \\ = \frac{1}{3} \frac{1}{D - (-1)}e^{-x} = \frac{1}{3}e^{-x} \int e^xe^{-x} dx = \boxed{\frac{1}{3}xe^{-x}}.$$

③ 以上の結果から、一般解は

$$y = \left(\frac{x}{3} + C_1 \right) e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \quad (C_1, C_2, C_3 \text{ は任意定数}).$$

4

(9 × 2 = 18 点)

(1) まず、 $y = y(t) := x'(t)$ が $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$ を満たすことに注意する. $y' = 1 + y^2$ より

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int dt, \quad \text{従って} \quad \tan^{-1}y = t + C_1.$$

ここで初期条件 $y(0) = 0$ を用いて $C_1 = 0$ となるので、 $\tan^{-1}y = t, y = \tan t$. これを積分して、

$$x = \int \tan t dt = \int \frac{-(\cos t)'}{\cos t} dt = -\log(\cos t) + C_2.$$

(ここで $-\log|\cos t|$ と書かなかったのは、今考えているのは $t = 0$ の近傍であり、そこでは $\cos t > 0$ となるからである.) $x(0) = 0$ より $C_2 = 0$ となり、求める解は $\boxed{x = -\log(\cos t)}$.

(2) まず、 $y = y(t) := x'(t)$ が $y' = 1 - y^2, y(0) = 0$ を満たすことに注意する. $y' = 1 - y^2$ より

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \int dt, \quad \text{従って} \quad \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+y}{1-y} \right) = t + C_1.$$

ここで初期条件 $y(0) = 0$ を用いて $C_1 = 0$ を得る. (上式対数の真数部分で絶対値を用いないのは、 $y = 0$ の近傍で $\frac{1+y}{1-y} > 0$ となるからである.) よって、 $\frac{1+y}{1-y} = e^{2t}$ となり、 y について解けば、

$$y = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \tanh t. \quad (\boxed{1} \text{ (2) の結果を用いれば計算が減らせる})$$

これを積分して、

$$x = \int \tanh t dt = \int \frac{(\cosh t)'}{\cosh t} dt = \log(\cosh t) + C_2 \quad \left(\text{あるいは、} x = \int \frac{(e^t + e^{-t})'}{e^t + e^{-t}} dt \right).$$

$x(0) = 0$ より $C_2 = 0$ となり、求める解は $\boxed{x = \log(\cosh t)}$ (あるいは、 $x = \log(e^t + e^{-t}) - \log 2$).

【補足】 次のように考えることもできる (細かい計算は同じ). 上と同じで $y(t) = x'(t)$ とする.

(1) $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$ より、 $\int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^t dt$. これより、 $\tan^{-1}y = t$, すなわち $y = \tan t$. 次に、 $x' = \tan t, x(0) = 0$ より、 $x = \int_0^t \tan t dt = -\log(\cos t)$.

(2) $y' = 1 - y^2$, $y(0) = 0$ より, $\int_0^y \frac{dy}{1-y^2} = \int_0^t dt$. これより, $\frac{1}{2} \log\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = t$, すなわち $y = \tanh t$. 次に, $x' = \tanh t$, $x(0) = 0$ より, $x = \int_0^t \tanh t \, dt = \log(\cosh t)$.

5

(5 + 4 + 3 = 12 点)

(1) 齊次方程式の特性方程式 $F(\tau) = \tau^2 + \omega^2 = 0$ の根は $\pm i\omega$ であるから, 齊次方程式の一般解は

$$x(t) = \boxed{C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

(2) $x_1(t) = At \cos \omega t$ とおけば,

$$x_1'(t) = A(\cos \omega t - \omega t \sin \omega t), \quad x_1''(t) = A(-2\omega \sin \omega t - \omega^2 t \cos \omega t)$$

より, $x_1''(t) + \omega^2 x_1(t) = -2A\omega \sin \omega t$. よって, $A = -\frac{1}{2\omega}$ において, ① の特殊解 $x(t) = \boxed{-\frac{t \cos \omega t}{2\omega}}$ が得られる.

【補足】 $At \cos \omega t$ の形という事前情報がなくても次のように特殊解は計算できる.

$$\frac{1}{D^2 + \omega^2} e^{i\omega t} = \frac{1}{D - i\omega} \left(\frac{1}{D + i\omega} e^{i\omega t} \right) = \frac{1}{D - i\omega} \left(\frac{1}{2i\omega} e^{i\omega t} \right) = \frac{1}{2i\omega} e^{i\omega t} \int e^{-i\omega t} e^{i\omega t} dt = \frac{-i}{2\omega} t e^{i\omega t}$$

であるから, 実部, 虚部をとることにより,

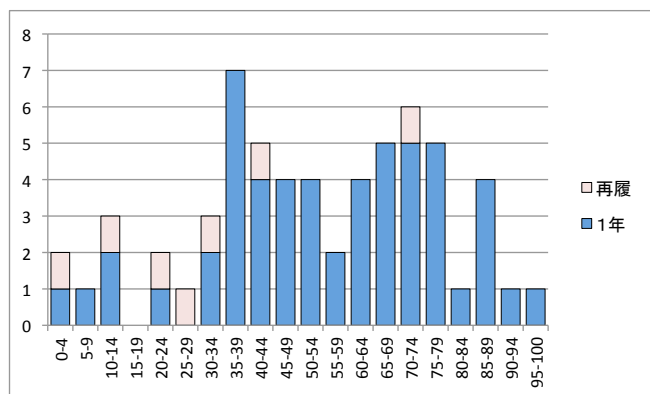
$$\frac{1}{D^2 + \omega^2} \cos \omega t = -\frac{t \sin \omega t}{2\omega}, \quad \frac{1}{D^2 + \omega^2} \sin \omega t = -\frac{t \cos \omega t}{2\omega}.$$

(3) (1), (2) より, ① の一般解は

$$x(t) = \left(C_1 - \frac{t}{2\omega} \right) \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数}).$$

初期条件により $x(0) = C_1 = 0$, $x'(0) = -\frac{1}{2\omega} + C_2\omega = 0$. よって, $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2\omega^2}$ となり, 求める解

$$\text{は } x(t) = \boxed{\frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega^2}}.$$



	人 数	平均点	最高点
1 年	54	55.7	100
再履	7	29.9	74
全体	61	52.8	100

クラス 9 担当：伊東（数学）