$\boxed{\text{解析学}}$ 【中間試験】 2016. 12. 14 (Wed)

$\boxed{1}$ 次の正項級数の収束, 発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

$\boxed{2}$ 次の整級数の収束半径および収束区間 (= 実数の範囲での収束域) を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\log n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2+1}x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2^n}$

$\boxed{3}$ 次の関数の $x=0$ における整級数展開 (Maclaurin 展開) を求めよ. また, その整級数展開の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\frac{1}{1-x-2x^2}$ (2) $\displaystyle\frac{1-\cosh x}{x^2}$ (3) $\displaystyle\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$\boxed{4}$ 次の関数の $x=0$ における整級数の 0 でない最初の 3 項を求めよ. (例えば, $\displaystyle\frac{1}{1-x^2}$ なら $1+x^2+x^4$ と答える.)

(1) $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ (2) $e^{-x}\cos x$ (3) $\displaystyle\frac{x}{\sin x}$

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ.

(1) 関数列 $\displaystyle\left\{\frac{nx}{(1+x)^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 \leqslant x < \infty)$ の極限関数を求めよ. 更に, この収束が一様収束であるかどうかを調べよ.

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ $(-\infty < x < \infty)$ が一様収束することを示せ. 更に, この級数で与えられる関数が C^1 級であるかどうかを調べよ.

$\boxed{6}$ 次の問いに答えよ.

(1) 級数の絶対収束, 条件収束の定義を述べ, 両者の性質の大きく異なる点を挙げよ.

(2) 整級数の収束半径の定義を述べ, 収束半径の重要な性質を挙げよ.

1 年クラス 9（担当：伊東）

$\boxed{\text{解析学}}$ 【中間試験】 《解答例》 2016. 12. 14 (Wed) 実施

$\boxed{1}$ (6 点 × 3 = 18 点)

正項級数 $\sum a_n$ の収束判定の問題. 判定には次の方法が基本的である.

⓪ これは正項級数に限らない事実であるが, $\sum a_n$ が収束するならば必ず $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ. 従って, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でない (すなわち, $\{a_n\}$ の極限が存在しない, または 0 以外の極限をもつ) ならば, $\sum a_n$ は発散する.

① $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ または $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ が存在するとき (後ろの極限が存在すれば前も存在し一致する),

$$\rho < 1 \text{ ならば } \sum a_n \text{ は収束し, } \rho > 1 \text{ ならば } \sum a_n \text{ は発散する.}$$

前の "n 乗根の極限" を用いる方法を Cauchy（コーシー）の判定法 (root test), 後の "比の極限" を用いる方法を d'Alembert（ダランベール）の判定法 (ratio test) と呼ぶ. 証明は公比 ρ の等比級数と比較することによってなされる.

② $f(x)$ が $x \geqslant 1$ で正値かつ単調減少のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束 (発散)} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty \ \ (= \infty).$$

この方法は積分判定法 (integral test) または Euler-Maclaurin（オイラー・マクローリン）の判定法と呼ばれる. ①で $\rho = 1$ となる場合の収束判定に有効なことが多い. 証明は不等式 $\int_1^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^N f(x)\,dx$ の極限形 $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ を見れば明らか.

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{\infty} = \infty$ であるから, 積分判定法により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ は $\boxed{\text{発散}}$ する.

(2) $a_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ とおけば, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \dfrac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{2n+2}{2n+1} \geqslant 1$ より, $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_1 = 2.$ $\left(\text{あるいは } a_n = \dfrac{\{(2n)!!\}^2}{(2n-1)!!(2n)!!} = \dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \geqslant 1.\right)$ よって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ は $\boxed{\text{発散}}$ する.

(3) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ とおけば, $n \to \infty$ のとき, $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to \dfrac{e}{3} < 1$ ($\because\ e = 2.718\cdots < 3$). よって, Cauchy の判定法により, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ は $\boxed{\text{収束}}$ する.

$\boxed{2}$ (8 点 × 3 = 24 点) $\cdots$ 収束半径が 4 点, 収束区間については端点での収束の吟味がないものは採点せず.

整級数の収束半径と収束区間を求める問題. 整級数 $\sum a_n x^n$ に対して,

$$|x| < r \text{ ならば収束し, } |x| > r \text{ ならば発散する}$$

を満たす $r \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$ を収束半径と呼ぶ. この量は $r = \sup\left\{|x| \;\middle|\; \sum a_n x^n \text{ が収束する}\right\}$ で与えられる (x の動く範囲が $\mathbb{R}$ であっても $\mathbb{C}$ であっても r の値は変わらない). 特に, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ または $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ が存在するとき, $r = \dfrac{1}{\rho}$ が成り立つ. (この事実は正項級数 $\sum |a_n x^n| = \sum |a_n||x|^n$ が収束するための条件を考えることにより容易に示される.) 一方, 収束区間とは集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ が収束する}\}$ のことであるが, 収束区間を決定する際に問題となるのは '端点' $x = \pm r$ が含まれるかどうかだけである ($|x| < r$ なら x は収束区間に属し, $|x| > r$ なら属さないことは収束半径の定義より明らか). 端点での収束判定には, 積分判定法や交項級数 (正負の項が交互に現れる級数) の収束条件が用いられる. 一般に, 交項級数 $\sum b_n$ に対して, $|b_n| \geqslant |b_{n+1}| \to 0$ (すなわち数列 $\{|b_n|\}$ が $\underline{\text{単調減少}}$ で $\underline{0 \text{ に収束}}$ する) ならば, $\sum b_n$ は収束する.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n\log n}$ とおけば,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)} = \frac{n}{n+1}\frac{\log n}{\log n + \log\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\frac{n+1}{n}}{\log n}\right)} \to 1 \ \ (n\to\infty)$$

より, 収束半径は $r = \dfrac{1}{1} = \boxed{1}$. 次に, 端点での級数の収束発散を調べる. $x = 1$ のとき級数は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ となるが, $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\log x} = \int_{\log 2}^{\infty}\frac{dt}{t} = \Big[\log t\Big]_{\log 2}^{\infty} = \infty$ ($t = \log x$ で置換) であるから, 積分判定法により発散する. また, $x = -1$ では級数は交項級数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$ となり, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n\log n}\right| = \dfrac{1}{n\log n}$ が (n について) 単調減少で 0 に収束するので, この交項級数は収束する. よって, 収束区間は $\boxed{-1 \leqslant x < 1}$.

(2) $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2+1}$ とおくとき, $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\dfrac{n^2+1}{2^n} = \dfrac{2(n^2+1)}{n^2+2n+2} \to 2$ であるから, 収束半径は $r = \boxed{\dfrac{1}{2}}$. 次に, 端点 $x = \pm\dfrac{1}{2}$ では, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2+1}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mp1)^n}{n^2+1}$. ここで,

$$\left|\frac{(\mp1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}, \quad \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \Big[\mathrm{Tan}^{-1}\,x\Big]_1^{\infty} = \frac{\pi}{4} < \infty$$

より, 積分判定法により, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mp1)^n}{n^2+2}$ は (絶対) 収束する. よって, 収束区間は $\boxed{-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}}$.

(3) まず, $y = x^2$ とおいて, 変数 y に関する整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{2^n}$ の収束半径 r' を求める. $b_n = \dfrac{1}{2^n}$ とおくとき, $\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$ であるから, $r' = \dfrac{1}{1/2} = 2$. よって, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^n} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{2^n}$ の収束半径は $r = \sqrt{r'} = \boxed{\sqrt{2}}$. 次に, 端点 $x = \pm\sqrt{2}$ での級数は, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\pm\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n} = \pm\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}1 = \pm\infty$ (複号同順). よって, 収束区間は $\boxed{-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}}$.

【別法】 実は, この整級数は初項 x, 公比 $x^2/2$ の等比級数である (これに気付けば非常に簡単な問題). よって, 級数が収束する x の範囲は $x^2/2 < 1$, すなわち $|x| < \sqrt{2}$ である. これより, 収束半径は $\sqrt{2}$, 収束区間は $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 更に, 具体形も求まる:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^n} = x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{x}{1-\frac{x^2}{2}} = \frac{2x}{2-x^2} \quad (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}).$$

3

(6 点 × 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開を求める問題. $\dfrac{1}{1+x}$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ といった重要な関数の整級数展開は常識とすべきである. また, 整級数に対して項別微分, 項別積分が許されるという事実もよく利用される.

(1) $\dfrac{1}{1-x-2x^2} = \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{2}{1-2x}\right)$ において,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \ \ (-1 < x < 1), \quad \frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n \ \ \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$$

であるから,

$$\frac{1}{1-x-2x^2} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}x^n} \ \ \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right), \quad \text{収束半径は } \boxed{\frac{1}{2}}.$$

【別法】(Cauchy の乗積級数による方法)

$\dfrac{1}{1-x-2x^2} = \dfrac{1}{(1+x)(1-2x)} = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^k\right)x^n$ において,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^k = (-1)^n\sum_{k=0}^{n}(-2)^k = (-1)^n\cdot\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)} = \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3}.$$

よって，$\dfrac{1}{1-x-2x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 2^{n+1}}{3} x^n$．(収束半径の計算は容易なので省略)

(2) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ $(-\infty < x < \infty)$ より，

$$1-\cosh x = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = -x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{2n}}{(2n+2)!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

よって，$\dfrac{1-\cosh x}{x^2}$ において $x=0$ は除きうる特異点であって，

$$\frac{1-\cosh x}{x^2} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{(2n+2)!} x^{2n}} \quad (-\infty < x < \infty), \qquad \text{収束半径は } \boxed{\infty}.$$

(3) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$ を用いて，

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{2} \frac{x^n}{n} = \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{2m+1}} \quad (-1 < x < 1), \qquad \text{収束半径は } \boxed{1}.$$

4

(6 点 × 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開の最初の何項かを求める問題．よく知られた整級数展開を用いて計算する．勿論，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 + \cdots$$

を用いてもよいが，計算が複雑になってしまう場合があるので注意を要する．

(1) $(1+x)^{\frac{2}{3}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2/3}{n} x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$ を用いて，

$$(1+x)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{1!}x + \frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}{2!}x^2 + \cdots = \boxed{1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2} + \cdots.$$

【別法】 $f(x) = (1+x)^{\frac{2}{3}}$ とおけば，$f'(x) = \dfrac{2}{3}(1+x)^{-\frac{1}{3}}$，$f''(x) = -\dfrac{2}{9}(1+x)^{-\frac{4}{3}}$．これより，$f(0) = 1$，$f'(0) = \dfrac{2}{3}$，$f''(0) = -\dfrac{2}{9}$ であるから，

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \cdots.$$

(2) $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$，$\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ を用いて，

$$e^{-x}\cos x = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \cdots\right) \qquad (x^3 \text{ の項まで展開})$$

$$= 1 - x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \cdots = \boxed{1 - x + \frac{1}{3}x^3} + \cdots.$$

(3) $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ を用いて，

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots} = \frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \cdots\right)}$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x^2}{6}\right)^2 + \cdots = \boxed{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4} + \cdots.$$

【別法】 $\dfrac{x}{\sin x}$ は偶関数なので $\dfrac{x}{\sin x} = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots$ の形に書ける．このとき，$\sin x =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x} \cdot \sin x &= (a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots)\Big(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots\Big)\\ &= a_0 x + \Big(-\frac{a_0}{6} + a_2\Big)x^3 + \Big(\frac{a_0}{120} - \frac{a_2}{6} + a_4\Big)x^5 + \cdots.\end{aligned}$$

これが x に一致するから,

$$a_0 = 1,\ -\frac{a_0}{6} + a_2 = \frac{a_0}{120} - \frac{a_2}{6} + a_4 = 0. \qquad \therefore\ a_0 = 1,\ a_2 = \frac{1}{6},\ a_4 = \frac{7}{360}.$$

よって, $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$ を得る.

$\boxed{5}$ (7 点 + 7 点 = 14 点)

(1) $f_n(x) = \frac{nx}{(1+x)^n}$ $(0 \leqslant x < \infty)$ とおく. $x > 0$ のときは, $nx \ll (1+x)^n$ $(n \to \infty)$ であるから $f_n(x) \to 0$. よって, $f_n(0) = 0$ と合わせて, $\{f_n(x)\}$ の極限関数は $f(x) = \boxed{0}$ (定数関数). 次に, 一様収束性を調べるために $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$ の増減を調べる. $f_n'(x) = \frac{n\{1-(n-1)x\}}{(1+x)^{n+1}}$ より, $f_n(x)$ $(n \geqslant 2)$ の増減は以下の通り.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{n-1}$	$\cdots$	∞
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{n-1})$	$\searrow$	0

よって, $f_n\Big(\frac{1}{n-1}\Big) = \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{1-n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}$ に注意して,

$$\sup_{x \geqslant 0} \big|f_n(x) - f(x)\big| = \sup_{x \geqslant 0} f_n(x) = \frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} \to \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \to \infty).$$

これより, $f_n \to f$ は $\boxed{\text{一様収束でない}}$ ことがわかる.

【別法】$x > 0$ での極限関数を求める際に, 上では, $p \in \mathbb{N}, a > 1$ に対して $n^p \ll a^n$ $(n \to \infty)$ が成り立つという事実を用いたが, n を正の連続変数に拡張して l'Hôpital(ロピタル)の定理を用いてもよい. 実際, $x > 0$ とすれば, $f_n(x)$ は $n \to \infty$ で $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形になるので, (n を連続変数と見なし, 分子, 分母を n で微分して)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{(1+x)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(1+x)^n \log(1+x)} = 0.$$

(2) 関数項級数の一様収束を調べる際に Weierstrass(ワイエルシュトラス)の判定法 (M-test) がよく用いられる. まず,

$$\Big|\frac{\cos nx}{n^3}\Big| \leqslant \frac{1}{n^3} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{2} < \infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ ($= g(x)$ とおく) は $\mathbb{R}$ 上で一様収束し, 連続関数を定める (連続関数の一様収束極限は連続関数となる!). 次に, 項別微分して得られる関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ についても,

$$\Big|\frac{\sin nx}{n^2}\Big| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2 < \infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, $\mathbb{R}$ 上で一様収束して連続関数を定めることがわかる. 従って, $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であって, $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ が成り立つ.

【補足】 関数列 $\{f_n\}$ が区間 I 上で**各点収束**するとは, 各 $x \in I$ に対して, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在することをいう. ここで定まる I 上の関数 f を $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**極限関数**と呼ぶ. 関数列 $\{f_n\}$ が I 上で**一様収束**するとは, 極限関数 f が存在し,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることをいう (講義では左辺を $\|f_n - f\|$ or $\|f_n - f\|_\infty$ と書いた). このとき, 次が成り立つ.

- 各 f_n が I 上で連続ならば, 極限関数 f も I 上で連続となる.
- 各 f_n が I 上で C^1 級で $\{f_n'\}$ が一様収束するならば, f も I 上で C^1 級で, 極限と積分の順序交換が可能 : $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.
- I が閉区間, 各 f_n が I 上で連続なら, 極限と積分の順序交換可能 : $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$.

関数項級数 $\sum f_n$ に対して, 部分和関数列 $\{F_N\}$ (F_N は $F_N(x) = \sum_{n\leqslant N} f_n(x)$ で定める) が I 上で一様収束するとき, $\sum f_n$ は I 上で一様収束するという. このとき ($\{F_N\}$ の) 極限関数は $\sum f_n$ 自身に他ならない. 関数項級数の一様収束については Weierstrass の判定法 (M-test) が大変有用である:

$$|f_n(x)| \leqslant M_n \ (\forall x \in I) \ \text{かつ} \ \sum M_n < \infty \ \text{ならば,} \ \sum f_n \ \text{は} \ I \ \text{上で一様収束する.}$$

また, $\sum f_n$ が I 上で一様収束するとき, (一様収束する関数項級数の性質に応じて) 次が成り立つ.

- 各 f_n が I 上で連続ならば, $\sum f_n$ も I 上で連続となる.
- 各 f_n が I 上で C^1 級で $\sum f_n'$ が一様収束するならば, $\sum f_n$ も I 上で C^1 級で, 項別微分可能: $\{\sum f_n(x)\}' = \sum f_n'(x)$.
- I が閉区間で, 各 f_n が I 上で連続ならば, 項別積分可能: $\int_I \sum f_n(x)\,dx = \sum \int_I f_n(x)\,dx$.

6 (6 点 + 6 点 = 12 点)

定義はきちんと押さえておいてほしい. 下に述べるほど詳しくなくてもよい.

(1) 級数 $\sum a_n$ に対して,

- $\sum |a_n|$ が収束するとき, $\sum a_n$ は 絶対収束 するという.
- $\sum a_n$ 自身は収束するが, $\sum |a_n|$ は発散するとき, $\sum a_n$ は 条件収束 するという.

どちらも収束する級数であるという点では共通するが, 和をとる順序の入れ替えに関して大きな性質の違いがある. $\sum a_n$ が絶対収束するときは, $\{a_n\}$ を勝手に並べ替えて作った数列 $\{\tilde{a}_n\}$ に対する級数 $\sum \tilde{a}_n$ も絶対収束し, しかも最初の級数と同じ和をもつ. これに対して, $\sum a_n$ が条件収束するときは, $\{a_n\}$ を適当に並べ替えて数列 $\{\tilde{a}_n\}$ を作れば, 級数 $\sum \tilde{a}_n$ が違う和をもったり, 発散したりする.

(2) 整級数 $\sum a_n x^n$ に対して, 条件

$$\sum a_n x^n \ \text{は} \ |x| < r \ \text{のとき (絶対) 収束し,} \ |x| > r \ \text{のとき発散する}$$

を満たす r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ を収束半径と呼ぶ. あるいは, 収束半径 r は (結果的に)

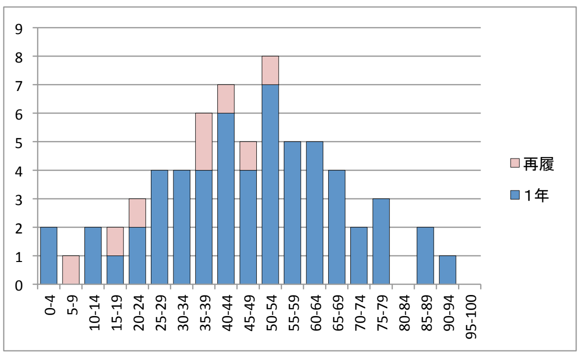
$$r = \sup\Big\{|x| \ \Big|\ \sum a_n x^n \text{が収束する}\Big\} \quad (x \text{ の動く範囲を } \mathbb{R}, \mathbb{C} \text{ のどちらで考えても同じ})$$

で与えられる (これを定義と考えてもよい). 収束半径 r は例えば次のような重要な性質をもつ:

$0 < r \leqslant \infty$ のとき, $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r$ において C^∞ 級関数を定め (ここまでは書いて欲しい), この範囲で項別微分, 項別積分が許される. すなわち,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \qquad \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n.$$

更に, 項別微分, 項別積分して得られる整級数の収束半径も r となる.



	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	58	47.8	20.7	92
再履	8	33.0	15.3	54