$\boxed{\text{解 析 学}}$ 【期末試験】 2016. 2. 17 (Wed) 実施

1 次の問いに答えよ.

(1) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$ の収束半径および収束区間を求めよ. (端点での収束, 発散は理由を付けて説明せよ.)

(2) 関数 $\dfrac{1}{2+x-x^2}$ を $x=0$ において整級数展開せよ. また, その収束半径を求めよ.

(3) 関数 $\dfrac{x}{\sin x}$ の $x=0$ における整級数展開の 0 でない最初の 3 項を求めよ.

2 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -2xy$　　(2) $\dfrac{dy}{dx} = (1-y)y$

(3) $\dfrac{dy}{dx} = x-2y+1$　　(4) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

3 1 階微分方程式 $2xy\dfrac{dy}{dx} + (x^2+y^2) = 0$ について次の問いに答えよ.

(1) 同次形の方程式に変形できることを示し, それに即した解法で一般解を求めよ.

(2) $(x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$ と変形するとき, これが完全微分形であることを示し, それに即した解法で一般解を求めよ.

4 次の $y=y(x)$ を未知関数とする定数係数線形微分方程式を解け. (① 対応する斉次方程式の基本解, ② 与えられた方程式の特殊解, ③ 与えられた方程式の一般解, の順に求めよ.)

(1) $3y'' + 2y' - y = e^{-x}$

(2) $y'' - 4y' + 4y = x^2 - 2x$

(3) $y''' + 8y = e^x \cos 2x$

5 $u=u(t)$ を未知関数とする微分方程式

$$L\frac{du}{dt} + Ru = E\sin\omega t \qquad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

について, 以下の問いに答えよ. ただし, L, R, E, ω は正定数とする.

(1) 斉次方程式 $L\dfrac{du}{dt} + Ru = 0$ を解け.

(2) ⓘ の一般解を求めよ.

(3) ⓘ を初期条件 $u(0)=0$ のもとで解け.

クラス 9 (担当：伊東)

$\boxed{\text{解析学}}$ 【期末試験】 《解答例》 2016. 2. 17 (Wed) 実施

$\boxed{1}$ $(10+6+6=22$ 点$)$

級数に関する基本的問題. (必要なら, 中間試験の解答例にまとめらた級数に関する要点を参照せよ.)

(1) x^n $(n \geqslant 1)$ の係数は $a_n = \dfrac{1}{2^n\sqrt{n}}$. このとき,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{2^n\sqrt{n}}{2^{n+1}\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to \frac{1}{2} \ \ (n\to\infty) \ \text{より}, \ (\text{収束半径}) = \boxed{2}.$$

次に, $x=\pm 2$ での級数の収束を調べる.

- $x=2$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{\infty} = \infty$ より, 発散.
- $x=-2$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ は交項級数で, $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$ (n について単調に減少し, 0 に収束する) より, 収束.

よって, 収束区間は $\boxed{[-2,2)}$. $(-2 \leqslant x < 2$ と答えてもよい.)

(2) $\dfrac{1}{2+x-x^2} = \dfrac{1}{(1+x)(2-x)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{1+x}\right)$ において, 等比級数の和の公式を用い,

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \ (|x|<2), \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \ (|x|<1).$$

よって, $\dfrac{1}{2+x-x^2} = \boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2^{n+1}}+(-1)^n\right\}x^n}$ $(|x|<1)$. 収束半径は明らかに $r=\boxed{1}$.

(3) $\displaystyle \sin x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ より,

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin x} &= \frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)} = \frac{1}{1-(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4))} \\ &= 1+\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)+\left(\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2+o(x^4) = \boxed{1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}}+o(x^4).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ $(6\times 4 = 24$ 点$)$

1 階微分方程式のうち, 変数分離形, 1 階線形微分方程式の問題である. 解法を大雑把に復習すると,

- **変数分離形：** $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. 一般解は $\displaystyle\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$ の積分を実行して得られる. ($g(\alpha)=0$ を満たす定数 α が存在すれば, 定数関数 $y=\alpha$ も解となる. この解は特異解となる場合がある.)
- **1 階線形微分方程式：** $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$. $p(x)$ の不定積分 (の 1 つ) を $P(x) = \displaystyle\int p(x)\,dx$ (積分定数は勝手に選んでよい) とおけば, 一般解は $y = e^{-P(x)}\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx$ で与えられる. 但し, ここでの不定積分は任意定数を含んでいる. そのことを明示するために, この解の公式を $y = e^{-P(x)}\left(\displaystyle\int e^{P(x)}q(x)\,dx + C\right)$ (C は任意定数) の形で表すことが多い. なお, 1 階線形微分方程式には特異解は現れない.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = -2xy$ は変数分離形. $y \neq 0$ のとき, $\displaystyle\int\frac{dy}{y} = \int(-2x)\,dx$ より, $\log|y| = -x^2 + C$ (C は任意定数). よって, $y = C_1 e^{-x^2}$ $(C_1 := \pm e^C \neq 0)$. 一方, $y=0$ (定数関数) は明らかに解. 以上をまとめて, 求める解は $\boxed{y = C_1 e^{-x^2}}$ (C_1 は任意定数).

(2) $\dfrac{dy}{dx} = (1-y)y$ は変数分離形. $y \neq 0, 1$ のとき, $\displaystyle\int\frac{dy}{(1-y)y} = \int\left(\frac{1}{1-y}+\frac{1}{y}\right)dy = \int dx$ であるから, $\log\left|\dfrac{y}{1-y}\right| = x + C$ (C は任意定数). よって, $\dfrac{y}{1-y} = C_1 e^x$ $(C_1 := \pm e^C \neq 0)$. これを y について解き, $y = \dfrac{C_1 e^x}{1+C_1 e^x}$. 一方, $y=0$, $y=1$ (ともに定数関数) は明らかに解. 以上をまとめて, 求める解は

$\boxed{y = \dfrac{C_1 e^x}{1 + C_1 e^x}}$ (C_1 は任意定数) および $\boxed{y = 1}$ ($C_1 = \infty$ に対応). 【注】 $y = \dfrac{1}{1 + C_2 e^{-x}}$ (C_2 は任意定数) および $y = 0$ と表してもよい.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = x - 2y + 1$ は $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x + 1$ と変形して, 1 階線形微分方程式. $P(x) = \int 2\,dx = 2x$ とおいて, $y = e^{-P(x)}\left(\int e^{P(x)}(x+1)\,dx + C\right)$. ここで, $\int e^{P(x)}(x+1)\,dx = \dfrac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \dfrac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \dfrac{1}{4}e^{2x}(2x+1)$. よって, 求める解は $\boxed{y = Ce^{-2x} + \dfrac{2x+1}{4}}$ (C は任意定数). 【別法】これは定数係数 1 階線形微分方程式であり, $(D+2)y = x+1$ と書ける ($D = \frac{d}{dx}$). 斉次方程式 $(D+2)y = 0$ の基本解は e^{-2x} であり, 非斉次方程式 $(D+2)y = x+1$ の特殊解は $\dfrac{1}{D+2}(x+1) = e^{-2x}\int e^{2x}(x+1)\,dx = e^{-2x}\left\{\dfrac{1}{2}e^{2x}(x+1) - \dfrac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\right\} = \dfrac{1}{4}(2x+1)$, あるいは $\dfrac{1}{D+2}(x+1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+D/2}(x+1) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{D}{2}\right)(x+1) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$. よって, 求める解は $y = Ce^{-2x} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ (C は任意定数).

(4) $p = \dfrac{dy}{dx}$ とおけば与えられた微分方程式は $\dfrac{dp}{dx} = 1 + p^2$ (変数分離形) と書ける. よって, $\int \dfrac{dp}{1+p^2} = \int dx + C_1$, すなわち $\mathrm{Tan}^{-1}\,p = x + C_1$ (C_1 は任意定数). これより, $\dfrac{dy}{dx}\ (= p) = \tan(x + C_1)$ となり, $\boxed{y = -\log|\cos(x + C_1)| + C_2}$ が従う (C_1, C_2 は任意定数).

3

($6 \times 2 = 12$ 点)

1 階微分方程式のうち, 同次形, 完全微分形の問題である. 解法を大雑把に復習すると,

- 同次形： $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. $z = \dfrac{y}{x}$ とおけば, $y = xz$, $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ であるから, 与えられた方程式は $z + x\dfrac{dz}{dx} = f(z)$, すなわち $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{f(z) - z}{x}$ と変形できる. これは変数分離形である (解法は既出).
- 完全微分形： $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. 長方形領域 D で $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ が成り立つならば, $P = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$ を満たす $F(x,y)$ が存在し, 解が $F(x,y) = C$ (C は任意定数) で与えられる. このような F は点 $(a,b) \in D$ を勝手に固定し,

$$F(x,y) = \int_a^x P(\xi, b)\,d\xi + \int_b^y Q(x,\eta)\,d\eta \left(= \int_b^y Q(a,\eta)\,d\eta + \int_a^x P(\xi, y)\,d\xi \right)$$

で与えられる.

(1) 両辺を x^2 で割って, $2\dfrac{y}{x}\dfrac{dy}{dx} + \left\{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right\} = 0$. よって, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1 + (\frac{y}{x})^2}{\frac{2y}{x}}$ となり, これは同次形. $z = \dfrac{y}{x}$ とおけば, $y = xz$, $\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}$ より, $z + x\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{1+z^2}{2z}$, すなわち $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{3z^2+1}{2xz}$ (変数分離形). これより, $\int \dfrac{2z}{3z^2+1}\,dz = -\int \dfrac{dx}{x} + C$. 積分を実行し, $\dfrac{1}{3}\log(3z^2+1) = -\log|x| + C$ (C は任意定数). よって, $x^3(3z^2+1) = C_1$ ($C_1 = \pm e^{3C} \neq 0$) となり, 求める解は $\boxed{x^3 + 3xy^2 = C_1}$ (C_1 は任意定数).

(2) $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ とおけば, 与えられた微分方程式は $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ と書ける. このとき $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ であるから, これは完全微分形. ここで,

$$F(x,y) := \int_0^x P(\xi, 0)\,d\xi + \int_0^y Q(x,\eta)\,d\eta = \int_0^x \xi^2\,d\xi + \int_0^y 2x\eta\,d\eta = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$$

とおけば, 求める解は $F(x,y) = C$, すなわち $\boxed{x^3 + 3xy^2 = C_1}$ ($C_1 = 3C$ は任意定数).

4

($10 \times 3 = 30$ 点)

定数係数線形微分方程式を $F(D)y = q(x)$ $\left(D = \dfrac{d}{dx}\right)$ の形で表すとき,

$$[F(D)y = q(x) \text{ の一般解}] = [F(D)y = q(x) \text{ の特殊解}] + [F(D)y = 0 \text{ の一般解}]$$

が成り立つ (線形微分方程式には特異解は存在しないことに注意). ここで, $[F(D)y = 0$ の一般解$]$ は特性多項式

$F(t)$ の因数分解 (あるいは特性方程式 $F(t)=0$ の根) を見ることにより得られる (詳細は教科書あるいは講義ノート参照, すぐ下の例も見よ). また, $[F(D)y=q(x)$ の特殊解$]$ は $\dfrac{1}{F(D)}q(x)$ を計算することにより得られるが, もっと簡単に計算できる場合もある ((1), (2) の中のコメント参照). $\dfrac{1}{F(D)}q(x)$ の計算で必ず覚えておくべき公式として次の 2 つを挙げておく：

- $\dfrac{1}{D-a}q(x)=e^{ax}\displaystyle\int e^{-ax}q(x)\,dx,$
- $F(a)\neq 0$ ならば $\dfrac{1}{F(D)}e^{ax}=\dfrac{1}{F(a)}e^{ax}.$

念のため, 最も基本的な $F(t)=at^2+bt+c$ ($a,b,c\in\mathbb{R}$ は定数, $a\neq 0$) の場合について, 斉次方程式 $F(D)y\ (=ay''+by'+cy)=0$ の基本解 (= 解空間の基底) および一般解について整理しておく (C_1, C_2 は任意定数を表す).

- $F(t)=0$ が 2 つの異なる実根 α,β をもつとき, $F(D)y=0$ の基本解は $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$. 従って, 一般解は $y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$.
- $F(t)=0$ が 2 つの異なる虚根 $\gamma,\overline{\gamma}$ (共役複素数の組) をもつとき, $\gamma=\alpha+i\beta$ ($\alpha,\beta\in\mathbb{R},\beta>0$) とおけば, $F(D)y=0$ の基本解は $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. 従って, 一般解は $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- $F(t)=0$ が 2 重根 $\alpha\in\mathbb{R}$ をもつとき, $F(D)y=0$ の基本解は $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$. 従って, 一般解は $y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x}$.

(1) 与えられた微分方程式は $(3D^2+2D-1)y=e^{-x}$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t)=3t^2+2t-1$.

① $F(t)=(3t-1)(t+1)$ であるから, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^{-x},\ e^{\frac{x}{3}}}$.

② 特殊解 $y=\dfrac{1}{3D^2+2D-1}e^{-x}$ は

$$y=\frac{1}{(3D-1)(D+1)}e^{-x}=\frac{1}{D+1}\Big(\frac{1}{3D-1}e^{-x}\Big)=\frac{1}{D+1}\Big(\frac{1}{3(-1)-1}e^{-x}\Big)$$
$$=-\frac{1}{4}\frac{1}{D-(-1)}e^{-x}=-\frac{1}{4}e^{-x}\int e^{x}e^{-x}\,dx=\boxed{-\frac{1}{4}\,xe^{-x}}.$$

あるいは部分分数分解を用いて

$$y=\frac{1}{4}\Big(\frac{3}{3D-1}e^{-x}-\frac{1}{D+1}e^{-x}\Big)=\frac{1}{4}\Big(\frac{3}{3(-1)-1}e^{-x}-e^{-x}\int e^{x}e^{-x}\,dx\Big)=-\frac{3}{16}e^{-x}-\frac{1}{4}xe^{-x}.$$

ここで 2 つの特殊解の形が見かけ上 $-\frac{3}{16}e^{-x}$ だけ異なるが, これは斉次方程式の解なので何ら問題はない (勿論, 単純な形の方が扱いやすい).

③ 以上の結果から, 求める一般解は

$$\boxed{y=\Big(-\frac{1}{4}x+C_1\Big)e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{3}}}\quad (C_1, C_2\text{ は任意定数 }).$$

(2) 与えられた微分方程式は $(D^2-4D+4)y=x^2-2x$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t)=t^2-4t+4$.

① $F(t)=(t-2)^2$ であるから, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^{2x},\ xe^{2x}}$.

② 特殊解 $y=\dfrac{1}{D^2-4D+4}(x^2-2x)$ は

$$y=\frac{1}{4}\frac{1}{1-(D-\frac{1}{4}D^2)}(x^2-2x)=\frac{1}{4}\Big\{1+\Big(D-\frac{1}{4}D^2\Big)+\Big(D-\frac{1}{4}D^2\Big)^2\Big\}(x^2-2x)$$
$$=\frac{1}{4}\Big(1+D+\frac{3}{4}D^2\Big)(x^2-2x)=\frac{1}{4}\Big(x^2-2x+2x-2+\frac{3}{4}\cdot 2\Big)=\boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{1}{8}}.$$

あるいは, 特殊解を $y=Ax^2+Bx+C$ (A,B,C は定数) の形で探す方法もある (下のコメント参照).

$$\begin{aligned}(D^2-4D+4)(Ax^2+Bx+C)&=2A-4(2Ax+B)+4(Ax^2+Bx+C)\\&=4Ax^2+(-8A+4B)x+(2A-4B+4C)\end{aligned}$$

であるから, $4Ax^2+(-8A+4B)x+(2A-4B+4C)=x^2-2x$ が恒等式となるように $A=\dfrac{1}{4}$, $B=0$, $C=-\dfrac{1}{8}$ と定めればよい.

③ 以上の結果から, 求める一般解は $\boxed{y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{8}+(C_1+C_2x)e^{2x}}$ $(C_1, C_2$ は任意定数$)$.

【②に関するコメント】一般に, $F(0)\neq 0$ ならば, $F(D)y=x^m$ の特殊解は x の m 次多項式の形で見つけることができる (上では $m=2$ の場合を考えた).

(3) 与えられた微分方程式は $(D^3+8)y=e^x\cos 2x$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t)=t^3+8$.

① $F(t)=(t+2)(t^2-2t+4)=0$ で, $t^2-2t+4=0$ の根は $1\pm\sqrt{3}\,i$. よって, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^x\cos(\sqrt{3}\,x),\ e^x\sin(\sqrt{3}\,x),\ e^{-2x}}$. ($e^{(1+\sqrt{3}\,i)x}, e^{(1-\sqrt{3}\,i)x}, e^{-2x}$ でも誤りではないが, 実数関数の形の方が望ましい.)

② まず, Euler の公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を用いて, $e^x\cos 2x=\mathrm{Re}\big[e^xe^{2ix}\big]=\mathrm{Re}\big[e^{(1+2i)x}\big]$ ($\mathrm{Re}[\cdot]$ は実部を表す). この事実に注意して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^3+8}e^{(1+2i)x}&=\frac{1}{(1+2i)^3+8}e^{(1+2i)x}=-\frac{1}{3+2i}e^{(1+2i)x}=-\frac{3-2i}{13}\cdot e^x(\cos 2x+i\sin 2x)\\&=-\frac{1}{13}e^x\{3\cos 2x+2\sin 2x+i(-2\cos 2x+3\sin 2x)\}.\end{aligned}$$

よって, 特殊解は

$$y=\frac{1}{D^3+8}e^x\cos 2x=\mathrm{Re}\Big[\frac{1}{D^3+8}e^{(1+2i)x}\Big]=\boxed{-\frac{1}{13}e^x(3\cos 2x+2\sin 2x)}.$$

あるいは特殊解を $y=Ae^x\cos 2x+Be^x\sin 2x$ (A, B は定数) の形で探す方法もある (下のコメント参照). $(D^3+8)(Ae^x\cos 2x+Be^x\sin 2x)=(-3A-2B)e^x\cos 2x+(2A-3B)e^x\sin 2x$ であるから, $(-3A-2B)e^x\cos 2x+(2A-3B)e^x\sin 2x=e^x\cos 2x$ が恒等式となるように $A=-\dfrac{3}{13}$, $B=-\dfrac{2}{13}$ と定めればよい.

③ 以上の結果から, 求める一般解は (C_1, C_2, C_3 は任意定数として)

$$\boxed{y=e^x\Big(-\frac{3}{13}\cos 2x-\frac{2}{13}\sin 2x+C_1\cos(\sqrt{3}\,x)+C_2\sin(\sqrt{3}\,x)\Big)+C_3e^{-2x}}.$$

【②に関するコメント】一般に, 実係数の多項式 $F(t)$ が $a, b\in\mathbb{R}$ に対して $F(a+ib)\neq 0$ を満たすならば, $F(D)y=e^{ax}\cos bx$ (or $e^{ax}\sin bx$) の特殊解は, $y=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$ (A, B は定数) の形で見つけられる (上では $a=1$, $b=2$ の場合を考えた).

5

$(4+6+2=12$ 点$)$

(1) $L\dfrac{du}{dt}+Ru=0$ は変数分離形の 1 階微分方程式と見ることもできるし, 定数係数の線形微分方程式 (斉次形) と見ることもできる. ここでは後者の観点で解くことにする. 特性多項式は (変数を λ として) $F(\lambda)=L\lambda+R$. 特性方程式 $F(\lambda)=0$ の根は $\lambda=-\dfrac{R}{L}$ のみであるから, 与えられた斉次方程式 $LDu+Ru=0$ $\big(D=\dfrac{d}{dt}\big)$ の一般解は $\boxed{u=Ce^{-\frac{Rt}{L}}}$ (C は任意定数).

(2) まず特殊解を求める.

$$u=\frac{1}{LD+R}E\sin\omega t=\frac{E}{LD+R}\,\mathrm{Im}[e^{i\omega t}]=\mathrm{Im}\Big[\frac{E}{LD+R}e^{i\omega t}\Big]$$

において,

$$\frac{E}{LD+R}e^{i\omega t}=\frac{E}{L\,i\omega+R}e^{i\omega t}=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}(R-iL\omega)(\cos\omega t+i\sin\omega t)$$

であるから,

$$u=\frac{1}{LD+R}E\sin\omega t=\mathrm{Im}\Big[\frac{E}{LD+R}e^{i\omega t}\Big]=\frac{E}{R^2+L^2\omega^2}(-L\omega\cos\omega t+R\sin\omega t).$$

よって, 求める一般解は

$$\boxed{u = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}(-L\omega\cos\omega t + R\sin\omega t) + Ce^{-\frac{Rt}{L}}} \qquad (C\text{ は任意定数}).$$

【別法 1】 特殊解は $u = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ の形で探すことができる. これを方程式に代入して,

$$L(-a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t) + R(a\cos\omega t + b\sin\omega t) = E\sin\omega t,$$

$$\text{すなわち,}\quad (bL\omega + aR)\cos\omega t + (-aL\omega + bR)\sin\omega t = E\sin\omega t.$$

特殊解となるためには, $bL\omega + aR = 0$, $-aL\omega + bR = E$. よって, $\begin{bmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$ より,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2 + L^2\omega^2}\begin{bmatrix} R & -L\omega \\ L\omega & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}\begin{bmatrix} -L\omega \\ R \end{bmatrix}.$$

従って, 特殊解が

$$u = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}(-L\omega\cos\omega t + R\sin\omega t)$$

で与えられる.

【別法 2】 考えている微分方程式は $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{R}{L}u = \dfrac{E}{L}\sin\omega t$ であるから, 1 階線形微分方程式の解の公式を用いて計算することもできる.

$$u = e^{-\frac{Rt}{L}}\left(\int e^{\frac{Rt}{L}}\cdot\frac{E}{L}\sin\omega t\,dt + C\right) = \frac{E}{L}e^{\frac{-Rt}{L}}\int e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t\,dt + Ce^{-\frac{Rt}{L}}.$$

ここで,

$$\begin{aligned}\int e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t\,dt &= \frac{L}{R}e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t - \frac{L\omega}{R}\int e^{\frac{Rt}{L}}\cos\omega t\,dt \\ &= \frac{L}{R}e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t - \frac{L\omega}{R}\left(\frac{L}{R}e^{\frac{Rt}{L}}\cos\omega t + \frac{L\omega}{R}\int e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t\,dt\right).\end{aligned}$$

$\int e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t\,dt$ について整理すれば,

$$\left(1 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}\right)\int e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t\,dt = \frac{L}{R}e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t - \frac{L^2\omega}{R^2}e^{\frac{Rt}{L}}\cos\omega t.$$

$$\therefore\ \int e^{\frac{Rt}{L}}\sin\omega t\,dt = \frac{L}{L^2\omega^2 + R^2}e^{\frac{Rt}{L}}(-L\omega\cos\omega t + R\sin\omega t).$$

よって,

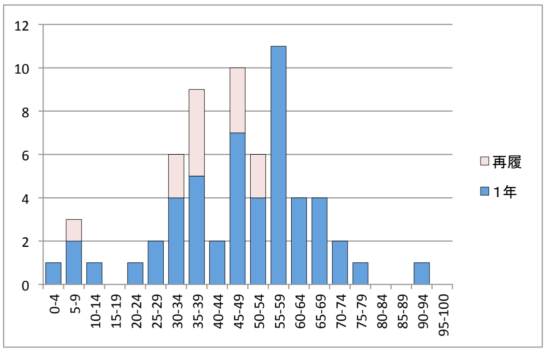
$$\begin{aligned}u &= \frac{E}{L}e^{\frac{-Rt}{L}}\cdot\frac{L}{L^2\omega^2 + R^2}e^{\frac{Rt}{L}}(-L\omega\cos\omega t + R\sin\omega t) + Ce^{-\frac{Rt}{L}} \\ &= \frac{E}{L^2\omega^2 + R^2}(-L\omega\cos\omega t + R\sin\omega t) + Ce^{-\frac{Rt}{L}}.\end{aligned}$$

(3) 一般解の中の C を初期条件 $u(0) = 0$ を満たすように定めればよい.

$$u(0) = -\frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2} + C = 0 \quad \text{より} \quad C = \frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}.$$

これより,

$$\begin{aligned}u &= \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}(-L\omega\cos\omega t + R\sin\omega t) + \frac{EL\omega}{R^2 + L^2\omega^2}e^{-\frac{Rt}{L}} \\ &= \boxed{\frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}\left\{L\omega\left(e^{-\frac{Rt}{L}} - \cos\omega t\right) + R\sin\omega t\right\}}.\end{aligned}$$



	人 数	平均点	最高点
1 年	52	46.5	91
再履	12	44.5	54
全体	64	46.0	91

クラス 9　担当：伊東（数学）