解析学 【中間試験】 2015. 12. 16 (Wed)

1 次の正項級数の収束, 発散を調べよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{2^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{11}{30}\Big)^n\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n^2}$

2 次の整級数の収束半径および収束区間 (= 実数の範囲での収束域) を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,2^{n-1}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,x^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2+2}\,x^{2n}$

3 次の関数の $x=0$ における整級数展開 (Maclaurin 展開) を求めよ. また, その整級数展開の収束半径を求めよ.

(1) $\log(2-x)$ (2) $\mathrm{Tan}^{-1}x$ (積分を利用) (3) $\varphi(x)=\begin{cases}\cosh\sqrt{x} & (x \geqslant 0)\\ \cos\sqrt{-x} & (x<0)\end{cases}$

4 次の関数の $x=0$ における整級数の 0 でない最初の 3 項を求めよ. (例えば, $\dfrac{1}{1-x^2}$ なら $1+x^2+x^4$ と答える.)

(1) $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ (2) $e^{-x}\sin x$ (3) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

5 次の問いに答えよ.

(1) $f_n(x)=\dfrac{nx}{(1+x)^n}$ $(0 \leqslant x < \infty)$ とおくとき, 関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 $f(x)$ を求めよ. 更に, この収束が一様収束であるかどうかを調べよ.

(2) 関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\sqrt{n}\,x)}{n^2}$ $(-\infty < x < \infty)$ が一様収束することを示せ. 更に, この級数で与えられる関数が C^1 級であるかどうかを調べよ.

6 次の問いに答えよ. (深入りしなくてよい.)

(1) 整級数の収束半径の定義を述べ, 収束半径の重要な性質を挙げよ.

(2) 関数列の一様収束の定義を述べ, 一様収束の重要な性質を挙げよ.

1 年クラス 9 (担当：伊東)

解析学 【中間試験】 《解答例》 2015. 12. 16 (Wed) 実施

1 (6 点 × 3 = 18 点)

正項級数 $\sum a_n$ の収束判定の問題. 判定には次の方法が基本的である.

⓪ これは正項級数に限らない事実であるが, $\sum a_n$ が収束するならば必ず $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ. 従って, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ でない (すなわち, $\{a_n\}$ の極限が存在しない, または 0 以外の極限をもつ) ならば, $\sum a_n$ は発散する.

① $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ または $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ が存在するとき (後ろの極限が存在すれば前も存在し一致する),

$$\rho < 1 \text{ ならば } \textstyle\sum a_n \text{ は収束し}, \ \rho > 1 \text{ ならば } \sum a_n \text{ は発散する}.$$

前の "n 乗根の極限" を用いる方法を Cauchy(コーシー) の判定法 (root test), 後の "比の極限" を用いる方法を d'Alembert(ダランベール) の判定法 (ratio test) と呼ぶ. 証明は公比 ρ の等比級数と比較することによってなされる.

② $f(x)$ が $x \geqslant 1$ で正値かつ単調減少のとき,

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束 (発散)} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty \ \ (= \infty).$$

この方法は 積分判定法 (integral test) または Euler-Maclaurin(オイラー・マクローリン) の判定法と呼ばれる. ① で $\rho = 1$ となる場合の収束判定に有効なことが多い. 証明は不等式 $\int_1^{N+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{N} f(n) \leqslant f(1) + \int_1^{N} f(x)\,dx$ による.

(1) $a_n = \dfrac{1}{n\log n}$ とおけば,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)} = \frac{n}{n+1}\frac{\log n}{\log n + \log\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\log\frac{n+1}{n}}{\log n}\right)} \to 1 \ \ (n\to\infty)$$

となり, ① の方法では判定できない. そこで ② の方法を試みる (ここまでのことは解答に書く必要なし).

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\log x} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \big[\log t\big]_{\log 2}^{\infty} = \infty \quad (t = \log x \text{ で置換})$$

であるから, 積分判定法により $\boxed{\text{発散}}$ する.

(2) $a_n = n\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ とおけば, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{n+1}{2n}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\dfrac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} \to \dfrac{1}{2}$ $(n\to\infty)$ (あるいは $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{(n+1)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \dfrac{n+1}{2n\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}} \to \dfrac{1}{2}$). $\dfrac{1}{2} < 1$ であるから, d'Alembert の判定法により, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{\pi}{2^n}$ は $\boxed{\text{収束}}$ する.

(3) $a_n = \left(\dfrac{11}{30}\right)^n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ とおけば, $n\to\infty$ のとき, $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{11}{30}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to \dfrac{11e}{30}$. $e = 2.718\cdots < 2.72$ より $\dfrac{11e}{30} < \dfrac{11\times 2.72}{30} = \dfrac{29.92}{30} < 1$ であるから, Cauchy の判定法により, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11}{30}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ は $\boxed{\text{収束}}$ する.

2 (8 点 × 3 = 24 点) ··· 収束半径が 4 点, 収束区間については端点での収束の吟味がないものは採点せず.

整級数の収束半径と収束区間を求める問題. 整級数 $\sum a_n x^n$ に対して,

$$|x| < r \text{ ならば絶対収束し}, \ |x| > r \text{ ならば発散する}$$

を満たす r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ を収束半径と呼ぶ. この量は $r = \sup\left\{|x| \;\middle|\; \sum a_n x^n \text{ が収束する}\right\}$ で与えられる (x の動く範囲が $\mathbb{R}$ であっても $\mathbb{C}$ であっても r の値は変わらない). 特に, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ または $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ が存在するとき, $r = \dfrac{1}{\rho}$ が成り立つ. (この事実は正項級数 $\sum |a_n x^n| = \sum |a_n||x|^n$ が収束するための条件を考えることにより容易に示される.) 一方, 収束区間とは集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ が収束する}\}$ のことであるが, 収束区間を決定する際に問題となるのは '端点' $x = \pm r$ が含まれるかどうかだけである ($|x| < r$ なら x は収束区間に属し, $|x| > r$ なら属さないことは収束半径の定義より明らか). 端点では 交項級数 (正負の項が交互に現

れる級数) となることがよくある．一般に，交項級数 $\sum b_n$ に対して，$|b_n| \geqslant |b_{n+1}| \to 0$ (すなわち数列 $\{|b_n|\}$ が単調減少で0 に収束する) ならば，$\sum b_n$ は収束する．

(1) $a_n = \dfrac{1}{n\,2^{n-1}}$ とおけば，$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{n\,2^{n-1}}{(n+1)2^n} = \dfrac{1}{2(1+\frac{1}{n})} \to \dfrac{1}{2}$ $(n \to \infty)$．よって，収束半径は $r = \dfrac{1}{1/2} = \boxed{2}$．次に，端点での収束発散を調べる．$x=-2$ では級数は $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ となるが，これは交項級数で $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \searrow 0$ (単調減少して 0 に収束) であるから収束．$x=2$ では級数は $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ となるが，$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \big[\log x\big]_1^{\infty} = \infty$ であるから発散．よって，収束区間は $\boxed{-2 \leqslant x < 2}$．収束区間は $[-2,2)$ の形で表現してもよい．［参考］$\boxed{3}$(1) の結果を用いれば，この整級数は収束区間上で $-2\log\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$ を表す．

(2) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおけば，$\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\{(n+1)!\}^2}{(2n+2)!}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \dfrac{(n+1)}{2(2n+1)} \to \dfrac{1}{4}$．よって，収束半径は $r = \dfrac{1}{1/4} = \boxed{4}$．次に，$x = \pm 4$ では級数は $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm 4)^n a_n$ となるが，$b_n = |(\pm 4)^n a_n|$ とおけば，

$$b_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{\{(2n)!!\}^2}{(2n)!!\cdot(2n-1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-3}\cdots\frac{2}{1} \geqslant 1$$

$$\left(\text{あるいは，}\ \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \geqslant 1\ \text{より}\ b_n \geqslant b_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant b_0 = 1\right)$$

であるから $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\pm 4)^n a_n$ は明らかに発散する ($\boxed{1}$⓪参照)．従って，収束区間は $\boxed{-4 < x < 4}$．
［参考］ $b_n \sim \sqrt{n\pi}$ $(n \to \infty)$ であることが知られている．

(3) まず，$y = x^2$ とおいて，変数 y に関する整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n^2+2}y^n$ の収束半径 r_1 を求める．$b_n = \dfrac{(-3)^n}{n^2+2}$ とおくとき，$\left|\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)^2+2}\dfrac{n^2+2}{3^n} = \dfrac{3(n^2+2)}{n^2+2n+3} \to 3$ であるから，$r_1 = \dfrac{1}{3}$．よって，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n^2+2}x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n^2+2}(x^2)^n$ の収束半径は $r = \sqrt{r_1} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$．次に，端点 $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ では，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2+2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2+2}\cdot\frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2}.$$

ここで，$\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2+2}\right| = \dfrac{1}{n^2+2}$，$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} \leqslant \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = 1 < \infty$ より，積分判定法により，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+2}$ は (絶対) 収束する．(あるいは，この級数は交項級数であり，第 n 項の絶対値 $\dfrac{1}{n^2+2}$ が n に関して単調減少して 0 に収束するから，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+2}$ が収束することが分かる.) よって，収束区間は $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$．

$\boxed{3}$

(6 点 × 3 = 18 点)
具体的な関数の整級数展開を求める問題．$\dfrac{1}{1+x}$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ といった重要な関数の整級数展開は常識とすべきである．また，整級数に対して項別微分，項別積分が許されるという事実もよく利用される．

(1) $\log(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$ を用いて，

$$\log(2-x) = \log 2 + \log\left(1-\frac{x}{2}\right) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \boxed{\log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,2^n}}\quad(-2 < x \leqslant 2).$$

収束半径は $\boxed{2}$．

(2) $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ $(|x| < 1)$ を項別積分して，

$$\mathrm{Tan}^{-1}\,x = \int_0^x\frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n t^{2n}\,dt = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}}\quad(-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

収束半径は $\boxed{1}$.

(3) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n}{n!}x^n = \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$, $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$ $(-\infty < x < \infty)$ より,

$$x \geqslant 0 \text{ のとき},\quad \cosh\sqrt{x} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x}\,)^{2m}}{(2m)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{(2m)!};$$

$$x < 0 \text{ のとき},\quad \cos\sqrt{-x} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(\sqrt{-x}\,)^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{(2m)!}.$$

よって, $\varphi(x) = \boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}}$. 収束半径は $\boxed{\infty}$.

4

(6 点 × 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開の最初の何項かを求める問題. よく知られた整級数展開を用いて計算する. 勿論,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \cdots$$

を用いてもよいが, 計算が複雑になってしまう場合があるので注意を要する.

(1) $(1+x)^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{3/2}{n}x^n$ $(-1 < x \leqslant 1)$ を用いる. $\binom{3/2}{0} = 1$, $\binom{3/2}{1} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1!} = \dfrac{3}{2}$, $\binom{3/2}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!} = \dfrac{3}{8}$ であるから, $(1+x)^{\frac{3}{2}} = \boxed{1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2} + \cdots$.

[別法] $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$ とおけば, $f'(x) = \dfrac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $f''(x) = \dfrac{3}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. これより, $f(0) = 1$, $f'(0) = \dfrac{3}{2}$, $f''(0) = \dfrac{3}{4}$ であるから,

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots.$$

(2) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ を用いて,

$$\begin{aligned} e^{-x}\sin x &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right) \\ &= x - x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \cdots = \boxed{x - x^2 + \frac{1}{3}x^3} + \cdots. \end{aligned}$$

(3) まず, $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(1+x)}{x}}$ において,

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+x)}{x} &= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m+1}x^m \quad (-1 < x \leqslant 1) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots} = e\cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots} \\ &= e\left\{1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \cdots\right)^2 + \cdots\right\} \\ &= e\left\{1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}\right)x^2 + \cdots\right\} = \boxed{e - \frac{e}{2}x + \frac{11e}{24}x^2} + \cdots. \end{aligned}$$

5

(7 点 + 7 点 = 14 点)

(1) $f_n(x) = \dfrac{nx}{(1+x)^n}$ $(0 \leqslant x < \infty)$ とおく. $x > 0$ のときは, $n \ll (1+x)^n$ $(n \to \infty)$ であるから, $f_n(x) = x\cdot\dfrac{n}{(1+x)^n} \to x\cdot 0 = 0$. よって, $f_n(0) = 0$ と合わせて, $\{f_n(x)\}$ の極限関数は $f(x) = \boxed{0 \text{ (定数関数)}}$.

次に, 一様収束性を調べるために, $|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)$ の増減を調べる. $f_n'(x)=\dfrac{n\{1-(n-1)x\}}{(1+x)^{n+1}}$ より, $f_n(x)$ $(n\geqslant 2)$ の増減は以下の通り.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{n-1}$	$\cdots$	∞
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(\frac{1}{n-1})$	$\searrow$	0

よって, $f_n\Big(\dfrac{1}{n-1}\Big)=\Big(\dfrac{n}{n-1}\Big)^{1-n}=\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}$ に注意して,

$$\sup_{x\geqslant 0}\big|f_n(x)-f(x)\big|=\sup_{x\geqslant 0}\,f_n(x)=\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}\to\frac{1}{e}\neq 0\quad(n\to\infty).$$

これより, $f_n\to f$ が $\boxed{\text{一様収束でない}}$ ことがわかる.

(2) 関数項級数の一様収束を調べる際に Weierstsrass（ワイエルシュトラス）の判定法がよく用いられる. まず,

$$\Big|\frac{\sin(\sqrt{n}\,x)}{n^2}\Big|\leqslant\frac{1}{n^2}\ \ (x\in\mathbb{R}),\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}=2<\infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, 関数項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(\sqrt{n}\,x)}{n^2}$ $(=g(x)$ とおく$)$ は $\mathbb{R}$ 上で一様収束し, 連続関数を定める (連続関数の一様収束極限は連続関数となる!). 次に, 項別微分して得られる関数項級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\sqrt{n}\,x)}{n\sqrt{n}}$ についても,

$$\Big|\frac{\cos(\sqrt{n}\,x)}{n\sqrt{n}}\Big|\leqslant\frac{1}{n\sqrt{n}}\ \ (x\in\mathbb{R}),\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\leqslant 1+\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}=3<\infty$$

であるから, Weierstrass の判定法により, $\mathbb{R}$ 上で一様収束して連続関数を定めることがわかる. 従って, $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であって, $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(\sqrt{n}\,x)}{n\sqrt{n}}$ が成り立つ.

6

(6 点 + 6 点 = 12 点)

定義はきちんと押さえておいてほしい. 次に述べるほど詳しく答える必要はない.

(1) 整級数 $\sum a_nx^n$ に対して, 条件

$$\sum a_nx^n \text{ は } |x|<r \text{ のとき (絶対) 収束し, } |x|>r \text{ のとき発散する}$$

を満たす r $(0\leqslant r\leqslant\infty)$ を収束半径と呼ぶ. あるいは, 収束半径 r は (結果的に)

$$r=\sup\Big\{|x|\ \Big|\ \sum a_nx^n\text{ が収束する }\Big\}\quad(x\text{ の動く範囲を }\mathbb{R},\mathbb{C}\text{ のどちらで考えても同じ})$$

で与えられる (これを定義と考えてもよい). 収束半径 r は例えば次のような重要な性質をもつ.

◎ $r>0$ のとき, $f(x):=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は $|x|<r$ において C^{∞} 級関数を定め, この範囲で項別微分, 項別積分が許される. すなわち,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,\qquad\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n.$$

更に, 項別微分, 項別積分して得られる整級数の収束半径も r となる.

◎ $0<r<\infty$ のとき, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は収束区間において連続関数を定める. (端点 $x=\pm r$ において収束しなければこれは上の性質に完全に含まれる.)

(2) (関数列 $\{f_n\}$ が区間 I 上で**各点収束**するとは, 各 $x\in I$ に対して, $f(x):=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ が存在することをいうここで定まる I 上の関数 f を $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**極限関数**と呼ぶ.) 関数列 $\{f_n\}$ が I 上で**一様収束**するとは, 極限関数 f が存在し,

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\to 0\quad(n\to\infty)$$

となることをいう (講義では左辺を $\|f_n-f\|$ or $\|f_n-f\|_{\infty}$ と書いた). このとき, 次が成り立つ.

◎ 各 f_n が I 上で連続ならば, f も I 上で連続となる.

◎ 各 f_n が I 上で C^1 級で $\{f'_n\}$ が一様収束するならば, f も I 上で C^1 級で, 極限と積分の順序交換が可能 : $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.

◎ I が閉区間, 各 f_n が I 上で連続なら, 極限と積分の順序交換可能 : $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$.

【補足】 関数列 $\{f_n\}$ が区間 I 上で**各点収束**するとは, 各 $x \in I$ に対して, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在することをいう. ここで定まる I 上の関数 f を $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の**極限関数**と呼ぶ. 関数列 $\{f_n\}$ が I 上で**一様収束**するとは, 極限関数 f が存在し,

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることをいう (講義では左辺を $\|f_n - f\|$ or $\|f_n - f\|_\infty$ と書いた). このとき, 次が成り立つ.

◎ 各 f_n が I 上で連続ならば, f も I 上で連続となる.

◎ 各 f_n が I 上で C^1 級で $\{f'_n\}$ が一様収束するならば, f も I 上で C^1 級で, 極限と積分の順序交換が可能 : $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.

◎ I が閉区間, 各 f_n が I 上で連続なら, 極限と積分の順序交換可能 : $\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx$.

関数項級数 $\sum f_n$ に対して, 部分和関数列 $\{F_N\}$ (F_N は $F_N(x) = \sum_{n\leqslant N} f_n(x)$ で定める) が I 上で一様収束するとき, $\sum f_n$ は I 上で一様収束するという. このとき ($\{F_N\}$ の) 極限関数は $\sum f_n$ 自身に他ならない. 関数項級数の一様収束について次の **Weierstrass の判定法** は大変有用である.

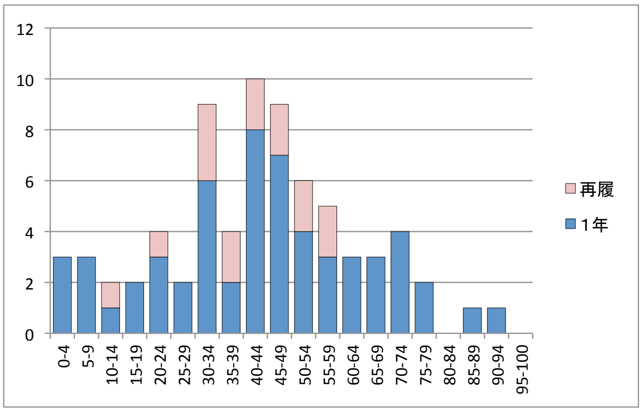
◎ $|f_n(x)| \leqslant M_n \ (\forall x \in I)$ かつ $\sum M_n < \infty$ ならば, $\sum f_n$ は I 上で一様収束する.

また, $\sum f_n$ が I 上で一様収束するとき, (一様収束する関数項級数の性質に応じて) 次が成り立つ.

◎ 各 f_n が I 上で連続ならば, $\sum f_n$ も I 上で連続となる.

◎ 各 f_n が I 上で C^1 級で $\sum f'_n$ が一様収束するならば, $\sum f_n$ も I 上で C^1 級で, 項別微分可能: $\left\{\sum f_n(x)\right\}' = \sum f'_n(x)$.

◎ I が閉区間で, 各 f_n が I 上で連続ならば, 項別積分可能: $\int_I \sum f_n(x)\,dx = \sum \int_I f_n(x)\,dx$.



	人 数	平均点	標準偏差	最高点
1 年	58	43.1	21.8	90
再履	15	39.3	11.7	55