解 析 学 【期末試験】 2015. 2. 17 (Tue) 実施

1 次の問いに答えよ.

(1) 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}} x^n$ の収束半径および収束区間を求めよ. (端点での収束, 発散は理由を付けて説明せよ.)

(2) 関数 $\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ を原点において整級数展開せよ. また, その収束半径を求めよ.

(3) 関数 $e^{-x}\sin x$ の原点における整級数展開を x^3 の項まで求めよ.

2 次の $y = y(x)$ を未知関数とする微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y$

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{1+x^2}$

(3) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x$

(4) $(x^2+y^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$ (ヒント：完全微分形 かつ 同次形)

3 次の $y = y(x)$ を未知関数とする定数係数線形微分方程式を解け. (① 対応する斉次方程式の基本解, ② 与えられた方程式の特殊解, ③ 与えられた方程式の一般解, の順に求めよ.)

(1) $4y'' + 4y' + y = x^2 + 1$

(2) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

(3) $y''' - y = \sin x$

4 $u = u(t)$ を未知関数とする微分方程式

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + au = 0 \qquad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

を $t > 0$ の範囲で考える. ただし, a は実数の定数とする.

(1) 変数変換 $t = e^s$ により u を s の関数と見なせば, ⓘ は

$$\frac{d^2u}{ds^2} + au = 0$$

に変換されることを示せ.

(2) ⓘ の一般解を求めよ (a について場合分けせよ).

クラス 2 (担当：伊東)

$\boxed{\text{解析学}}$ 【期末試験】 《解答例》　　　2015. 2. 17 (Tue) 実施

$\boxed{1}$ $(10+6+6=22$ 点$)$

級数に関する基本的問題. (必要なら, 中間試験の解答例にまとめらた級数に関する要点を参照せよ.)

(1) x^n $(n \geqslant 0)$ の係数は $a_n = \dfrac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}$. このとき,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{2n+3}}\frac{\sqrt{2n+1}}{(-2)^n}\right| = 2\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} \to 2 \ (n\to\infty) \text{ より, (収束半径)} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

次に, $x = \pm\dfrac{1}{2}$ での級数の収束を調べる.

- $x = \dfrac{1}{2}$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ は交項級数で, $\left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}} \searrow 0$ (n について単調に減少し, 0 に収束する) より, 収束.
- $x = -\dfrac{1}{2}$ のとき, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{(-2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2x}} = \Big[\sqrt{2x}\Big]_1^{\infty} = \infty$ より, 発散.

よって, 収束区間は $\boxed{\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]}$. (勿論, $-\dfrac{1}{2} < x \leqslant \dfrac{1}{2}$ と答えてもよい.)

(2) $\displaystyle\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\{\log(1+x) - \log(1-x)\} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\right\}$

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{2n}x^n = \boxed{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1}}$. 収束半径 r を計算するために, まず $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{2m+1}$ の収束半径 r_1 を調べる: $b_m = \dfrac{1}{2m+1}$ とおけば $\dfrac{b_{m+1}}{b_m} = \dfrac{2m+1}{2m+3} \to 1$ であるから, $r_1 = \dfrac{1}{1} = 1$. 一方, 収束半径の定義 (および性質) から, $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1} = x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x^2)^m}{2m+1}$ は $x^2 < r_1$ で絶対収束し, $x^2 > r_1$ で発散する. すなわち, $|x| < \sqrt{r_1}$ で絶対収束し, $|x| > \sqrt{r_1}$ で発散する. 従って, 求める収束半径は $r = \sqrt{r_1} = 1$. 【注意】一般に級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ の収束半径を r_1 とすれば, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{2n}$ および $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{2n+1}$ の収束半径はともに $\sqrt{r_1}$ で与えられる (上で説明した通り) という事実を既知としてもよい. より一般に, 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径 r は (どんな場合も) $\dfrac{1}{r} = \displaystyle\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ で与えられることが知られている (Cauchy-Hadamard の定理).

(3) $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \sin x = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1}$ より,

$$e^{-x}\sin x = \left\{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right\}\left\{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right\}$$
$$= x - x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + o(x^3). = \boxed{x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}.$$

$\boxed{2}$ $(6\times 4 = 24$ 点$)$

1 階の微分方程式の問題である. 変数分離形, 同次形, 1 階線形微分方程式 (余裕があれば完全微分形も) の解法をきちんと身につけておくこと. 大雑把に復習すると (完全微分形については省略),

- 変数分離形: $\dfrac{dy}{dx} = f(x)g(y)$. 一般解は $\displaystyle\int\frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$ の積分を実行して得られる. ($g(y_0) = 0$ を満たす定数 y_0 が存在すれば, 定数関数 $y = y_0$ も解となる. この解は特異解となる場合がある.)
- 同次形: $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$. $u = \dfrac{y}{x}$ とおけば, $y = xu$, $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ であるから, 与えられた方程式は

$u+x\dfrac{du}{dx}=f(u)$, すなわち $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}$ と変形できる. これは変数分離形である.

- **1 階線形微分方程式：** $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$. $p(x)$ の不定積分 (の 1 つ) を $P(x)=\int p(x)\,dx$ (積分定数は勝手に選んでよい) とおけば, 一般解は $y=e^{-P(x)}\int e^{P(x)}q(x)\,dx$ で与えられる. 但し, ここでの不定積分は任意定数を含んでいる. そのことを明示するために, この解の公式を $y=e^{-P(x)}\left(\int e^{P(x)}q(x)\,dx+C\right)$ (C は任意定数) の形で表すことが多い. なお, 1 階線形微分方程式には特異解は現れない.

(1) $\dfrac{dy}{dx}=1+y$ は変数分離形. $y\neq -1$ のとき, $\int\dfrac{dy}{1+y}=\int dx$ より, $\log|y+1|=x+C$ (C は任意定数). よって, $y=C_1e^x-1$ ($C_1:=\pm e^C\neq 0$). 一方, $y=-1$ (定数関数) は明らかに解. 以上をまとめて, 求める解は $\boxed{y=C_1e^x-1}$ (C_1 は任意定数). 【別法】$\dfrac{dy}{dx}-y=1$ (1 階線形微分方程式) と見て, $y=e^x\left(\int e^{-x}\,dx+C\right)=e^x(-e^{-x}+C)=Ce^x-1$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\,y}{1+x^2}$ は変数分離形. $y\neq 0$ のとき, $\int\dfrac{dy}{y}=\int\dfrac{x}{1+x^2}\,dx=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{2x}{1+x^2}\,dx$ より, $\log|y|=\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)+C$ (C は任意定数). よって, $y=C_1\sqrt{1+x^2}$ ($C_1:=\pm e^C\neq 0$). 一方, $y=0$ (定数関数) は明らかに解. 以上をまとめて, 求める解は $\boxed{y=C_1\sqrt{1+x^2}}$ (C_1 は任意定数).

(3) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=x$ は 1 階線形微分方程式. $\int 2x\,dx=x^2$ より, $y=e^{-x^2}\left(\int e^{x^2}x\,dx+C\right)=e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{2}e^{x^2}+C\right)$. よって, 求める解は $\boxed{y=Ce^{-x^2}+\dfrac{1}{2}}$ (C は任意定数).

(4) 両辺を x^2 で割って, $\left\{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right\}\dfrac{dy}{dx}+2\,\dfrac{y}{x}=0$ (同次形). $u=\dfrac{y}{x}$ とおけば, $y=xu$, $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$ より, $(1+u^2)\left(u+x\dfrac{du}{dx}\right)+2u=0$, すなわち

$$(\star)\qquad x\frac{du}{dx}=-\frac{u(u^2+3)}{u^2+1}\quad\text{(変数分離形)}.$$

$u\neq 0$ のときは, $\int\dfrac{u^2+1}{u(u^2+3)}\,du=-\int\dfrac{dx}{x}$. ここで, $\dfrac{u^2+1}{u(u^2+3)}=\dfrac{1}{3}\,\dfrac{(u^3+3u)'}{u^3+3u}$ (あるいは部分分数分解して $\dfrac{u^2+1}{u(u^2+3)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{u}+\dfrac{2u}{u^2+3}\right)$) であるから, $\dfrac{1}{3}\log|u^3+3u|=-\log|x|+C$ (C は任意定数). よって, $\log|x^3(u^3+3u)|=3C$ となり, $x^3(u^3+3u)=C_1$ $(:=\pm e^{-3C}\neq 0)$. 一方, $u=0$ (定数関数) も明らかに $(\star)$ の解であるから, $(\star)$ の解は $x^3(u^3+3u)=C_1$ (C_1 は任意定数) で与えられる. $u=\dfrac{y}{x}$ であったから, 求める解は $\boxed{3x^2y+y^3=C_1}$. 【別法】 $P(x,y)=2xy$, $Q(x,y)=x^2+y^2$ とおけば, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ であるから, 与えられた微分方程式は完全微分形. ここで,

$$F(x,y):=\int_0^x P(\xi,0)\,d\xi+\int_0^y Q(x,\eta)\,d\eta=\int_0^x 0\,d\xi+\int_0^y(x^2+\eta^2)\,d\eta=x^2y+\frac{1}{3}y^3$$

より, 求める解は $F(x,y)=C$, すなわち $3x^2y+y^3=C_1$ ($C_1=3C$ は任意定数).

3

($12\times 3=36$ 点)

定数係数の線形微分方程式を $F(D)y=q(x)$ $\left(D=\dfrac{d}{dx}\right)$ の形で表すとき,

$$[F(D)y=q(x)\text{ の一般解}]=[F(D)y=q(x)\text{ の特殊解}]+[F(D)y=0\text{ の一般解}]$$

が成り立つ (線形微分方程式には特異解は存在しないことに注意). ここで, $[F(D)y=0$ の一般解$]$ は特性多項式 $F(t)$ の因数分解 (あるいは特性方程式 $F(t)=0$ の解) を見ることにより得られる (詳細は教科書あるいは講義ノート参照, すぐ下の例も見よ). また, $[F(D)y=q(x)$ の特殊解$]$ は $\dfrac{1}{F(D)}q(x)$ を

計算することにより得られるが, もっと簡単に計算できる場合もある ((1), (2) の中のコメント参照). $\dfrac{1}{F(D)}q(x)$ の計算で必ず覚えておくべき公式として次の 2 つを挙げておく：

- $\dfrac{1}{D-a}q(x) = e^{ax}\displaystyle\int e^{-ax}q(x)\,dx,$
- $F(a) \neq 0$ ならば $\dfrac{1}{F(D)}q(x) = \dfrac{1}{F(a)}e^{ax}.$

念のため, 最も基本的な $F(t) = at^2 + bt + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ は定数, $a \neq 0$) の場合について, 斉次方程式 $F(D)y\ (= ay'' + by' + cy) = 0$ の基本解 (= 解空間の基底) および一般解について整理しておく (C_1, C_2 は任意定数を表す).

- $F(t) = 0$ が 2 つの異なる実数解 α, β をもつとき, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x}, e^{\beta x}$. 従って, 一般解は $y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$.
- $F(t) = 0$ が 2 つの異なる虚数解 $\gamma, \overline{\gamma}$ (共役複素数の組) をもつとき, $\gamma = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$) とおけば, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. 従って, 一般解は $y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.
- $F(t) = 0$ が 2 重解 $\alpha \in \mathbb{R}$ をもつとき, $F(D)y = 0$ の基本解は $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}$. 従って, 一般解は $y = C_1e^{\alpha x} + C_2xe^{\alpha x}$.

(1) 与えられた微分方程式は $(4D^2+4D+1)y = x^2+1$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = 4t^2+4t+1$.

① $F(t) = (2t+1)^2$ であるから, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^{-\frac{x}{2}},\ xe^{-\frac{x}{2}}}$.

② 特殊解 $y = \dfrac{1}{4D^2+4D+1}(x^2+1)$ は

$$y = \frac{1}{1+4(D+1)D}(x^2+1) = \left\{1 - 4(D+1)D + 16(D+1)^2D^2\right\}(x^2+1)$$
$$= (x^2+1) - 4(2+2x) + 16\cdot 2 = \boxed{x^2 - 8x + 25}.$$

あるいは, 特殊解を $y = Ax^2 + Bx + C$ (A, B, C は定数) の形で探す方法もある (下のコメント参照). $(4D^2+4D+1)(Ax^2+Bx+C) = 4(2A) + 4(2Ax+B) + (Ax^2+Bx+C) = Ax^2 + (8A+B)x + (8A+4B+C)$ であるから, $Ax^2 + (8A+B)x + (8A+4B+C) = x^2+1$ が恒等式となるように $A = 1,\ B = -8,\ C = 25$ と定めればよい.

③ 以上の結果から, 求める一般解は

$$\boxed{y = x^2 - 8x + 25 + (C_1 + C_2x)e^{-\frac{x}{2}}} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数 }).$$

【②に関するコメント】一般に, $F(0) \neq 0$ ならば, $F(D)y = x^m$ の特殊解は x の m 次多項式の形で見つけることができる (上では $m = 2$ の場合を考えた).

(2) 与えられた微分方程式は $(D^2 - 3D + 2)y = e^{2x}$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t) = t^2 - 3t + 2$.

① $F(t) = (t-1)(t-2)$ であるから, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^x,\ e^{2x}}$.

② 特殊解 $y = \dfrac{1}{D^2-3D+2}e^{2x}$ は

$$y = \frac{1}{D-2}\left(\frac{1}{D-1}e^{2x}\right) = \frac{1}{D-2}\left(\frac{1}{2-1}e^{2x}\right) = \frac{1}{D-2}e^{2x} = e^{2x}\int e^{-2x}e^{2x}dx = \boxed{xe^{2x}}.$$

あるいは部分分数分解を用いて

$$y = \frac{1}{D-2}e^{2x} - \frac{1}{D-1}e^{2x} = e^{2x}\int e^{-2x}e^{2x}dx - \frac{1}{2-1}e^{2x} = (x-1)e^{2x}.$$

ここで 2 つの特殊解の形が見かけ上 e^{2x} だけ異なるが, これは斉次方程式の解なので何ら問題はない (勿論, 単純な形の方が扱いやすい).

③ 以上の結果から, 求める一般解は $\boxed{y = C_1e^x + (x + C_2)e^{2x}}$ (C_1, C_2 は任意定数).

(3) 与えられた微分方程式は $(D^3-1)y=\sin x$. 斉次方程式の特性多項式は $F(t)=t^3-1$.

① $F(t)=(t-1)(t^2+t+1)=0$ で, $t^2+t+1=0$ の解は $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$. よって, 斉次方程式の基本解は $\boxed{e^x,\ e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2},\ e^{-\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,x}{2}}$. ($e^x, e^{\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}x}, e^{\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}x}$ でも誤りではないが, 実数関数の形の方が望ましい.)

② まず, Euler の公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を用いて, $\sin x=\mathrm{Im}\big[e^{ix}\big]$ ($\mathrm{Im}[\cdot]$ は虚部を表す). この事実に注意して,

$$\begin{aligned}\frac{1}{D^3-1}e^{ix}&=\frac{1}{i^3-1}e^{ix}=-\frac{1}{1+i}e^{ix}=-\frac{1-i}{2}(\cos x+i\sin x)\\&=-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)+\frac{i}{2}(\cos x-\sin x).\end{aligned}$$

よって, 特殊解は

$$y=\frac{1}{D^3-1}\sin x=\mathrm{Im}\Big[\frac{1}{D^3-1}e^{ix}\Big]=\boxed{\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)}.$$

あるいは特殊解を $y=A\cos x+B\sin x$ (A,B は定数) の形で探す方法もある (下のコメント参照). $(D^3-1)(A\cos x+B\sin x)=(-A-B)\cos x+(A-B)\sin x$ であるから, $(-A-B)\cos x+(A-B)\sin x=\sin x$ が恒等式となるように $A=\dfrac{1}{2}$, $B=-\dfrac{1}{2}$ と定めればよい.

③ 以上の結果から, 求める一般解は (C_1,C_2,C_3 は任意定数として)

$$\boxed{y=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)+C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\Big(C_2\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2}+C_3\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\Big)}.$$

【②に関するコメント】一般に, 実係数の多項式 $F(t)$ が $a,b\in\mathbb{R}$ に対して $F(a+ib)\neq 0$ を満たすならば, $F(D)y=e^{ax}\cos bx$ (or $e^{ax}\sin bx$) の特殊解は, $y=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$ (A,B は定数) の形で見つけられる (上では $a=0$, $b=1$ の場合を考えた).

4

(8 + 10 = 18 点)

(1) $t=e^s$ より,

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{ds^2}&=\frac{d}{ds}\Big(\frac{du}{ds}\Big)=\frac{d}{ds}\Big(\frac{du}{dt}\frac{dt}{ds}\Big)=\frac{d}{ds}\Big(\frac{du}{dt}\Big)\frac{dt}{ds}+\frac{du}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}\\&=\frac{d^2u}{dt^2}\Big(\frac{dt}{ds}\Big)^2+\frac{du}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}=(e^s)^2\frac{d^2u}{dt^2}+e^s\frac{du}{dt}=t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}.\end{aligned}$$

これより明らかに,

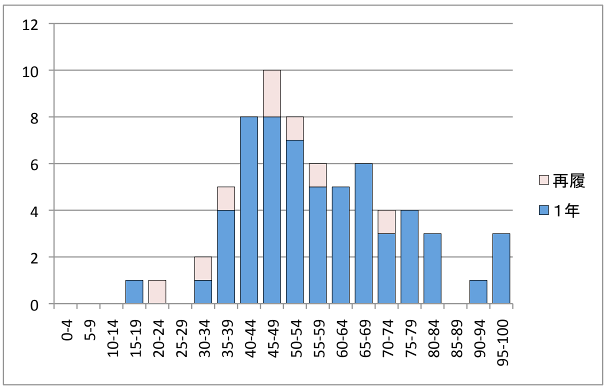
$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+t\frac{du}{dt}+au=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{d^2u}{ds^2}+au=0.$$

(2) まず, $\dfrac{d^2u}{ds^2}+au=0$ を解く. この斉次微分方程式の特性多項式は λ^2+a (変数を λ とした) であるから, a の符号に注意して

$$\begin{aligned}&a>0 \text{ のとき: } && u=C_1\cos\big(\sqrt{a}\,s\big)+C_2\sin\big(\sqrt{a}\,s\big),\\&a=0 \text{ のとき: } && u=C_1+C_2s,\\&a<0 \text{ のとき: } && u=C_1e^{-\sqrt{-a}\,s}+C_2e^{\sqrt{-a}\,s} \quad (C_1,C_2 \text{ は任意定数}).\end{aligned}$$

$s=\log t$ $(t>0)$ であったから, もとの微分方程式の解は

$$\begin{aligned}&a>0 \text{ のとき: } && u=C_1\cos\big(\sqrt{a}\,\log t\big)+C_2\sin\big(\sqrt{a}\,\log t\big),\\&a=0 \text{ のとき: } && u=C_1+C_2\log t,\\&a<0 \text{ のとき: } && u=C_1\,t^{-\sqrt{-a}}+C_2\,t^{\sqrt{-a}} \quad (C_1,C_2 \text{ は任意定数}).\end{aligned}$$



	人 数	平均点	最高点
1 年	59	57.0	96
再履	8	54.7	70
全体	67	56.6	96

クラス 2　担当：伊東（数学）