

1 次の正項級数の収束, 発散を調べよ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad (3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{11}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

2 次の整級数の収束半径および収束区間 (= 実数の範囲での収束域) を求めよ.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}} \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \log n} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 1} x^{2n}$$

3 次の関数の $x = 0$ における整級数展開 (Maclaurin 展開) を求めよ. また, その整級数展開の収束半径を求めよ.

$$(1) \log(2+x) \quad (2) \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \quad (3) \frac{1}{(1-x)^2}$$

4 次の関数の $x = 0$ における整級数の 0 でない最初の 3 項を求めよ. (例えば, $\frac{1}{1-x^2}$ なら $1 + x^2 + x^4$ と答える.)

$$(1) \sqrt[3]{1+x} \quad (2) e^{-x} \cos x \quad (3) (1-x)^{\frac{1}{x}}$$

5 次の問いに答えよ.

- (1) 級数の絶対収束の定義を述べ, 絶対収束に関する重要な性質を 1 つ挙げよ.
(2) 区間 $(0, \infty)$ 上で定義された正值で連続な単調減少関数 $f(x)$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ が収束}$$

であることを示せ.

6 次の問いに答えよ.

- (1) 関数列 $\left\{ \frac{1}{1+x^{2n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ の極限関数 $f(x)$ を求め, 一様収束性を調べよ.
(2) 関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ が $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示せ. 更に, この級数で与えられる関数が C^1 級であることを示し, その導関数を関数項級数の形で表せ.

1

(6 点 $\times$ 3 = 18 点)

正項級数 $\sum a_n$ の収束判定の問題. 判定には次の方法が基本的である.

① これは正項級数に限らない事実であるが, $\sum a_n$ が収束するならば必ず $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ が成り立つ. 従って, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でない (すなわち, $\{a_n\}$ の極限が存在しない, または 0 以外の極限をもつ) ならば, $\sum a_n$ は発散する.

① $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ または $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$ が存在するとき (後者の極限が存在すれば前者も存在し一致する),

$\rho < 1$ ならば $\sum a_n$ は収束し, $\rho > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する.

前の “ n 乗根の極限” を用いる方法を Cauchy の判定法 (root test), 後の “比の極限” を用いる方法を d'Alembert の判定法 (ratio test) と呼ぶ. 証明は公比 ρ の等比級数と比較することによってなされる.

② $f(x)$ が $x \geq 1$ で正値かつ単調減少のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ が収束 (発散) } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty (= \infty).$$

この方法は積分判定法 (integral test) または Euler-Maclaurin の判定法と呼ばれる. ① で $\rho = 1$ となる場合の収束判定に有効なことが多い. 証明は不等式 $\int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq f(1) + \int_1^N f(x) dx$ による.

(1) $a_n = \frac{1}{n}$ とおけば, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$) となり, ① の方法では判定できない. そこで②の方法を試してみる (ここのことは解答に書く必要なし).

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = [\log x]_1^{\infty} = \infty$$

であるから, 積分判定法により, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は **発散** する.

(2) $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ とおけば, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\{(n+1)!\}^2 (2n)!}{(2n+2)! (n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{4}$ ($n \rightarrow \infty$). $\frac{1}{4} < 1$ であるから, d'Alembert の判定法により, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ は **収束** する.

(3) $a_n = \left(\frac{4}{11}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ とおけば, $\sqrt[n]{a_n} = \frac{4}{11} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{4e}{11}$ ($n \rightarrow \infty$). $e = 2.718\ldots < 2.72$ より $\frac{4e}{11} < \frac{4 \times 2.72}{11} = \frac{10.88}{11} < 1$ であるから, Cauchy の判定法により, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{11}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ は **収束** する.

2

(8 点 $\times$ 3 = 24 点) $\cdots$ 収束半径が 4 点, 収束区間については端点での収束の吟味がないものは採点せず.

整級数の収束半径と収束区間を求める問題. 整級数 $\sum a_n x^n$ に対して,

$$|x| < r \text{ ならば絶対収束し, } |x| > r \text{ ならば発散する}$$

を満たす r ($0 \leq r \leq \infty$) を収束半径と呼ぶ. この量は $r = \sup \{|x| \mid \sum a_n x^n \text{ が収束する} \}$ で与えられる (x の動く範囲が $\mathbb{R}$ であっても $\mathbb{C}$ であっても r の値は変わらない). 特に, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ または $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ が存在するとき, $r = \frac{1}{\rho}$ が成り立つ. (この事実は正項級数 $\sum |a_n x^n| = \sum |a_n| |x|^n$ が収束するための条件を考えることにより容易に示される.) 一方, 収束区間とは集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ が収束する}\}$ のことであるが, 収束区間を決定する際に問題となるのは ‘端点’ $x = \pm r$ が含まれるかどうかだけである ($|x| < r$ なら x は収束区間に属し, $|x| > r$ なら属さないことは収束半径の定義より明らか). 端点では交項級数 (正負の項が交互に現れる級数) となることがよくある. 一般に, 交項級数 $\sum b_n$ に対して, $|b_n| \geq |b_{n+1}| \rightarrow 0$ (すなわち数列 $\{|b_n|\}$ が 単調減少 で 0 に収束 する) ならば, $\sum b_n$ は収束する.

(1) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ とおけば, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \ (n \rightarrow \infty)$. よって, 収束半径は $r = \frac{1}{1/2} = 2$. 次に, 端点 $x = \pm 2$ では級数は $\sum_{n=1}^{\infty} 2(\pm 1)^n$ となるが, $|2(\pm 1)^n| = 2 \nrightarrow 0$ であるから発散. よって, 収束区間は $-2 < x < 2$. 収束区間は $(-2, 2)$ の形で表現してもよい.

(2) $a_n = \frac{1}{n \log n}$ とおけば,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n \log n}{(n+1) \log(n+1)} = \frac{n}{n+1} \frac{\log n}{\log n + \log \frac{n+1}{n}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n})} \rightarrow 1 \ (n \rightarrow \infty)$$

より, 収束半径は $r = \frac{1}{1} = 1$. 次に, 端点での級数の収束発散を調べる. $x = 1$ のとき級数は $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ となるが, $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = [\log t]_{\log 2}^{\infty} = \infty \ (t = \log x \text{ で置換})$ であるから, 積分判定法により発散する. また, $x = -1$ では級数は交項級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$ となり, $\left| \frac{(-1)^n}{n \log n} \right| = \frac{1}{n \log n}$ が $(n \text{ について})$ 単調減少で 0 に収束するので, この交項級数は収束する. よって, 収束区間は $-1 \leq x < 1$.

(3) まず, $y = x^2$ とおいて, 変数 y に関する整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 1} y^n$ の収束半径 r' を求める. $b_n = \frac{(-2)^n}{n^2 + 1}$ とおくと, $\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + 1} \frac{n^2 + 1}{2^n} = \frac{2n^2 + 2}{n^2 + 2n + 2} \rightarrow 2$ であるから, $r' = \frac{1}{2}$. よって, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 1} (x^2)^n$ の収束半径は $r = \sqrt{r'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 次に, 端点 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ では,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 1} \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2 + 1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

$\left| \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \right| = \frac{1}{n^2 + 1}$ は $(n \text{ について})$ 単調減少で 0 に収束するので交項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ は収束する (あるいは $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1 < \infty$ より絶対収束). よって, 収束区間は $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3 (6 点 $\times$ 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開を求める問題. $\frac{1}{1+x}$, e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ といった重要な関数の整級数展開は常識とすべきである. また, 整級数に対して項別微分, 項別積分が許されるという事実もよく利用される.

(1) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \ (-1 < x \leq 1)$ より,

$$\log(2+x) = \log 2 + \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \log 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n} x^n$$

(収束半径は 2). $(-2 < x \leq 2)$.

(2) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ (x \in \mathbb{R})$ より,

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n-2} = x^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(2m+2)!} x^{2m} \quad (n = m+1). \end{aligned}$$

よって, $\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+2)!} x^{2n} \ (x \in \mathbb{R})$. 収束半径は ∞ .

(3) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ($|x| < 1$) であるから、項別微分により、

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left\{ \frac{1}{1-x} \right\}' = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right\}' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n} \quad (|x| < 1).$$

$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-x)^n$ ($|x| < 1$) と考えて $\binom{-2}{n}$ を計算してもよい。あるいは、Cauchy の乗積級数 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) x^n$ を用いて、

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1).$$

収束半径は $\boxed{1}$.

4 (6 点 $\times$ 3 = 18 点)

具体的な関数の整級数展開の最初の何項かを求める問題。よく知られた整級数展開を用いて計算する。勿論、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \cdots$$

を用いてもよいが、計算が複雑になってしまう場合があるので注意を要する。

(1) $\sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} x^n$ ($-1 < x \leq 1$) を用いる。 $\binom{1/3}{0} = 1$, $\binom{1/3}{1} = \frac{1/3}{1!} = \frac{1}{3}$, $\binom{1/3}{2} = \frac{1/3 \cdot (-2/3)}{2!} = -\frac{1}{9}$

であるから、 $\sqrt[3]{1+x} = \boxed{1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2} + \cdots$.

[別法] $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ とおけば、 $f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$, $f''(x) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$. これより、 $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$ であるから、

$$\sqrt[3]{1+x} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \cdots.$$

(2) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ を用いて、

$$\begin{aligned} e^{-x} \cos x &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots \right) \\ &= 1 - x + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) x^3 + \cdots = \boxed{1 - x + \frac{1}{3}x^3} + \cdots. \end{aligned}$$

(3) まず、 $(1-x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\log(1-x)}{x}}$ において、

$$\begin{aligned} \frac{\log(1-x)}{x} &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (-1 \leq x < 1) \\ &= -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \cdots. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} (1-x)^{\frac{1}{x}} &= e^{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \cdots} = e^{-1} e^{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \cdots} \\ &= e^{-1} \left\{ 1 + \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} - \cdots \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{2} - \cdots \right)^2 + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{e} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{5x^2}{24} + \cdots \right) = \boxed{\frac{1}{e} - \frac{x}{2e} - \frac{5x^2}{24e}} + \cdots. \end{aligned}$$

5 (5 点 + 7 点 = 12 点)

(1) 級数 $\sum a_n$ が絶対収束するとは、各項の絶対値をとって得られる級数 $\sum |a_n|$ が収束することをいう。絶対収束する級数は次のような重要な性質をもつ。

○ 絶対収束する級数は収束する。

◎ $\sum a_n$ が絶対収束するとき、 $\{a_n\}$ を勝手に並び替えて作った数列 $\{\tilde{a}_n\}$ に対する級数 $\sum \tilde{a}_n$ も絶対収束し、しかも最初の級数と同じ和をもつ： $\sum a_n = \sum \tilde{a}_n$ 。

◎ $\sum a_n, \sum b_n$ が絶対収束するとき、 $a_j b_k$ の形の数全体を勝手な順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とすれば、 $\sum c_n$ も絶対収束し、しかもその和は $\sum a_n, \sum b_n$ の定める和の積に等しい： $\sum c_n = (\sum a_n)(\sum b_n)$ 。

(2) $n \leq x \leq n+1$ のとき、 $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ であるから、これを区間 $[n, n+1]$ で積分して

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

更に、この不等式の各辺を n に関して 1 から $N-1$ まで足し合わせ、

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

不等式の各辺は N に関して単調増加であるから、 $N \rightarrow \infty$ での極限 (正数または ∞) が存在し、

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

これより明らかに

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \text{ (収束)} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx < \infty \text{ (収束)}.$$

6

(5 点 + 7 点 = 12 点)

一様収束について最後に【補足】としてまとめておいたので、そちらも是非読んで欲しい。

(1) $n \rightarrow \infty$ のとき、 $x^{2n} \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{if } |x| > 1 \\ 1 & \text{if } |x| = 1 \\ 0 & \text{if } |x| < 1 \end{cases}$ であるから、極限関数は $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{if } |x| = 1 \\ 1 & \text{if } |x| < 1 \end{cases}$ となる。

ここで、 $\left\{\frac{1}{1+x^{2n}}\right\}$ は連続関数列であるが、極限関数は $|x| = 1$ で不連続となる。一般に、連続関数列が一様収束するならば極限関数も連続となる。しかし、ここでの極限関数は不連続関数であるから、一様収束ではないことが分かる。

(2) 関数項級数の一様収束を調べる際に ワイエルシュトラス Weierstrass の判定法 (M-test) がよく用いられる。まず、

$$\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \quad (-\infty < x < \infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{2} < \infty$$

であるから、Weierstrass の判定法により、関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ ($= h(x)$ とおく) は一様収束し、連続関数を定める (連続関数列の一様収束極限は連続関数となる!)。次に、形式的に項別微分して得られる関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ についても、

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad (-\infty < x < \infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 2 < \infty$$

であるから、Weierstrass の判定法により、一様収束して連続関数を定めることがわかる。従って、 $h(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で C^1 級であって、 $h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ が成り立つ。

【補足】 関数列 $\{f_n\}$ が区間 I 上で各点収束するとは、各 $x \in I$ に対して、 $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ が存在するこ

とをいう. ここで定まる I 上の関数 f を $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限関数と呼ぶ. 関数列 $\{f_n\}$ が I 上で一様収束するとは, 極限関数 f が存在し,

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることをいう (講義では左辺を $\|f_n - f\|$ or $\|f_n - f\|_{\infty}$ と書いた). このとき, 次が成り立つ.

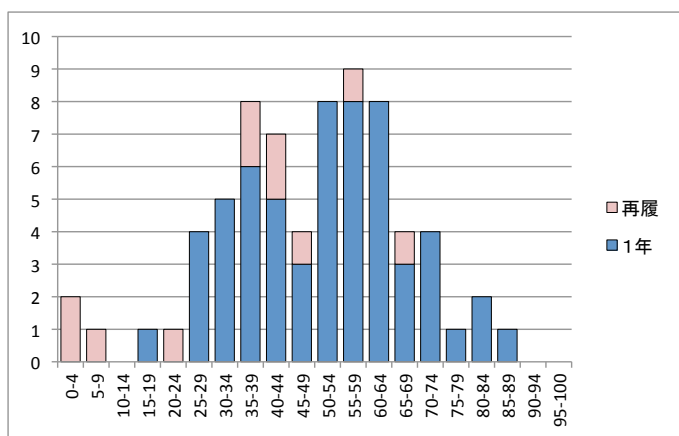
- ◎ 各 f_n が I 上で連続ならば, f も I 上で連続となる.
- ◎ 各 f_n が I 上で C^1 級で $\{f'_n\}$ が一様収束するならば, f も I 上で C^1 級で, 極限と積分の順序交換が可能: $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$.
- ◎ I が閉区間, 各 f_n が I 上で連続なら, 極限と積分の順序交換可能: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx$.

関数項級数 $\sum f_n$ に対して, 部分和関数列 $\{F_N\}$ (F_N は $F_N(x) = \sum_{n \leq N} f_n(x)$ で定める) が I 上で一様収束するとき, $\sum f_n$ は I 上で一様収束するという. このとき ($\{F_N\}$ の) 極限関数は $\sum f_n$ 自身に他ならない. 関数項級数の一様収束について次の Weierstrass の判定法は大変有用である.

- ◎ $|f_n(x)| \leq M_n$ ($\forall x \in I$) かつ $\sum M_n < \infty$ ならば, $\sum f_n$ は I 上で一様収束する.

また, $\sum f_n$ が I 上で一様収束するとき, (一様収束する関数項級数の性質に応じて) 次が成り立つ.

- ◎ 各 f_n が I 上で連続ならば, $\sum f_n$ も I 上で連続となる.
- ◎ 各 f_n が I 上で C^1 級で $\sum f'_n$ が一様収束するならば, $\sum f_n$ も I 上で C^1 級で, 項別微分可能: $\{\sum f_n(x)\}' = \sum f'_n(x)$.
- ◎ I が閉区間で, 各 f_n が I 上で連続ならば, 項別積分可能: $\int_I \sum f_n(x) dx = \sum \int_I f_n(x) dx$.



	人数	平均点	標準偏差	最高点
J	13	47.2	16.4	89
I	17	54.4	18.4	82
M	13	53.6	12.2	73
S	16	51.6	14.6	72
1年	59	51.9	15.9	89
再履	11	33.2	20.7	65